SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

ET HOMOGÈNES TRANSFORMABLES EN ÉQUATIONS À COEFFICIENTS CONSTANTS AU MOYEN D'UN CHANGEMENT DE FONCTION : $y = \lambda(z)$ Y

PAR J. FAYET
(Paris)

Dans une note récente [1], nous avons montré que, si une équation différentielle linéaire et homogène, d'ordre quelconque est transformable en équation de même forme à coefficients constants au moyen d'un changement de variable : $\frac{d\xi}{dx} = u(x)$, il est possible de trouver également un changement de fonction $y = \lambda(x) . Y'$ tel que le faisceau des courbes intégrales de l'équation transformée se déduit du faisceau des courbes intégrales de l'équation initiale par une translation parallèle à l'axe des y; et réciproquement.

Monsieur Rey Pastor [2] a donné de ce résultat une démonstration particulièrement simple.

Dans la présente note, nous nous proposons d'étudier les invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène; relatifs à un changement de fonction : $y = \lambda(x) . Y$, ce qui nous permettra d'expliciter les équations transformables par ce moyen en équations à coefficients constants; puis nous montrerons que, lorsque la transformation en l'équation à coefficients constants est possible, il existe un autre changement de fonction transformant l'équation initiale en une autre équation linéaire dont le faisceau des courbes intégrales comprend le faisceau des courbes intégrales de l'équation initiale.

(1) JOSEPH FAYET, *Sur les équations linéaires et homogènes transformables en équations à coefficients constants au moyen d'un changement de variable.* — *Revista Matemática Hispano Americana,* número 3 de 1936.

(2) REY PASTOR, *Sobre un tipo de ecuaciones diferenciales.* — *Ibidem.* — *Bol. Sem. Mat.,* número 19.

I. *Formes canoniques.*

1° *Équation du second ordre.*

Soit l'équation linéaire et homogène du second ordre :

$$y'' + a_1 . y' + a_2 . y = 0 \qquad [1]$$

dans laquelle a_1 et a_2 désignent des fonctions quelconques de x.

Le changement de fonction :

$$y = \lambda(x) . Y \qquad [2]$$

transforme l'équation [1] en l'équation de même forme :

$$Y'' + \alpha_1 . Y' + \alpha_2 . Y = 0 \qquad [3]$$

avec :

$$\alpha_1 = \frac{2\lambda' + a_1 . \lambda}{\lambda}; \qquad \alpha_2 = \frac{\lambda'' + a_1 . \lambda' + a_2 . \lambda}{\lambda}. \qquad [4]$$

Donnons à $\lambda(x)$ la détermination L qui annulle α_1 soit :

$$L = e^{-\frac{1}{2}\int a_1 . dx}. \qquad [5]$$

L'équation [1] prend alors la forme :

$$Y'' + I . Y = 0$$

avec :

$$I = \frac{L'' + a_1 . L' + a_2 . L}{L} = a_2 - \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1'}{2}. \qquad [6]$$

La forme [6] de l'équation [1] est une forme canonique de [1] au sens d'Halphen. C'est-à-dire que I est un invariant absolu; en d'autres termes, I ne dépend pas de la fonction $\lambda(x)$ intervenant dans la formule du changement [2]. En effet, si l'on part de [3] et si l'on forme avec α_1 et α_2 les expressions L_0, I_0 comme nous avons formé L et I avec a_1 et a_2, nous obtenons :

$$L_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot L; \qquad I_0 = I.$$

Les dérivées successives de I sont aussi des invariants absolus.

Si l'équation [1] a ses coefficients constants, il vient :

$$L = e^{hx}; \qquad I = \text{constante}.$$

Comme I est un invariant absolu, on en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation [1] quelconque soit transformable en équation de même forme à coefficients constants, au moyen d'un changement $y = \lambda(x) . Y$, est que ses coefficients a_1 et a_2 satisfassent à la relation :

$$a_2 - \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1'}{2} = \text{const.} = K.$$

En d'autres termes, l'équation :

$$y'' + a_1 . y' + \left[K + \frac{a_1^2}{4} + \frac{a_1'}{3}\right] y = 0$$

dans laquelle a_1 désigne une fonction quelconque de x se transforme en l'équation $Y'' + K . Y = 0$ par la transformation :

$$y = e^{-\frac{1}{2}\int a_1 . dx} . Y.$$

Remarque : C'est un résultat bien connu que le changement défini par : $\frac{z'}{z} = - A_2 . y$ transforme l'équation de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = A_0 + A_1 . y + A_2 y^2$$

en l'équation linéaire et homogène du second ordre :

$$z'' - \left(A_1 + \frac{A_2'}{A_2}\right) . z' - A_0 . A_2 . z = 0.$$

Par conséquant, d'après les résultats précédents, on peut dire que l'équation de Ricatti

$$\frac{dy}{dx} = K + \frac{1}{2 . A_2} . \left(A_1 + \frac{A_2'}{A_2}\right)' - \frac{1}{4 . A_2} . \left(A_1 + \frac{A_2'}{A_2}\right)^2 + A_1 . y + A_2 . y_2$$

est, quelles que soient les fonctions A_1 et A_2, réductible aux quadratures.

2° *Équation du $n^{\text{ième}}$ ordre.*

Le changement [2] transforme l'équation :

$$y^{(n)} + a_1 . y^{(n-1)} + a_2 . y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} . y' + a_n . y = 0 \qquad [7]$$

en l'équation de même forme :

$$Y^{(n)} + \alpha_1 . Y^{(n-1)} + \alpha_2 . Y^{(n-2)} + \dots + \alpha_{n-1} . Y' + \alpha_n . Y = 0 \qquad [8]$$

où les α_i ont respectivement pour expressions :

$$\alpha_1 = \frac{\frac{n}{1} \cdot \lambda' + a_1 \cdot \lambda}{\lambda}$$

$$\alpha_2 = \frac{\frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \lambda'' + \frac{n-1}{1} a_1 \cdot \lambda' + a_2 \cdot \lambda}{\lambda}$$

$$\alpha_3 = \ldots$$

Si l'on donne à $\lambda(x)$ la détermination L qui annulle α_1 soit :

$$L = e^{-\frac{1}{n}\int a_1 \cdot dx} \qquad [9]$$

l'équation [7] prendra la forme canonique :

$$Y^{(n)} + I_2 \cdot Y^{(n-2)} + I_3 \cdot Y^{(n-3)} + \ldots + I_{n-1} \cdot Y' + I_n \cdot Y = 0 \quad [10]$$

où les I_i sont les valeurs des α_i correspondants où $\lambda = L$. Il est facile de vérifier que tous les I_i sont des invariants absolus. Et par suite on obtient $n-1$ relations nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les a_i d'une équation [7] pour que celle-ci soit transformable en équation à coefficients constants. Ces $n-1$ conditions sont : $I_i = K_i$ $[i = 2, 3; \ldots; n]$ K_i étant des constantes.

On pourrait aussi former ces $n-1$ conditions en écrivant que, dans l'équation transformée on doit avoir $\alpha_1 = h_1$; $\alpha_2 = h_2$; $\alpha_3 = h_3$; ..., les h_i étant des constantes, et en portant dans les $n-1$ relations : $\alpha_i = h_i\,[i = 2, 3, \ldots, n]$ la valeur de λ tirée de la première $\alpha_1 = h_1$.

Comme application, on pourra vérifier que l'équation du 3ième ordre :

$$y''' + a_1 \cdot y'' + \left[a_1' + \frac{a_1^2}{3} + K_1\right] y' + \\ + \left[\frac{a_1''}{3} + \frac{1}{27} \cdot a_1^3 + \frac{a_1 a_1'}{3} + \frac{a_1}{3} \cdot K_1 + K_2\right] y = 0$$

où la fonction a_1 est quelconque se transforme en l'équation

$$Y''' + K_1 \cdot Y' + K_2 \cdot Y = 0$$

si l'on fait :

$$y = e^{-\frac{1}{3}\int a_1 \cdot dx}.$$

II. *Interprétation géométrique.*

1° *Équation du second ordre.*

Reprenons l'équation [1]; et faisons le changement de fonction défini par :

$$y = Y' + \mu(x) . Y. \tag{11}$$

L'équation [1] se transforme en l'équation linéaire et homogène du $3^{\text{ième}}$ ordre :

$$\begin{aligned} F \equiv Y''' + (\mu + a_1) . Y'' + (2\mu' + a_1 . \mu + a_2) . Y' \\ + (\mu'' + a_1 . \mu' + a_2 . \mu) . Y = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Cherchons alors à déterminer les fonctions $\mu(x)$, $g(x)$ et $G(x)$ de façon que l'on ait :

$$G(x) . F \equiv \frac{d}{dx}[g(x) . f] \tag{13}$$

f désignant le 1^{er} membre de [1], le sens de l'identité étant entendu de la façon suivante : les coefficients des dérivées de même ordre des 2 fonctions doivent être égaux dans les deux membres. On trouve que $\mu(x)$; $g(x)$; $G(x)$ doivent satisfaire au système :

$$G = g$$

$$G(\mu + a_1) = g' + g . a_1$$

$$G(2\mu' + a_1\mu + a_2) = g' . a_1 + g . a_1' + g . a_2$$

$$G(\mu'' + a_1 . \mu' + a_2 . \mu) = g . a_2' + g' . a_2.$$

On en tire :

$$G(x) \equiv g(x) = e^{\frac{1}{2}\int a_1 . dx}; \qquad \mu = \frac{a_1}{2}.$$

Et la dernière équation du système nous donne la relation à laquelle doivent satisfaire les cofficients a_1 et a_2 de (1) pour qu'on puisse obtenir l'identité posée. On obtient ainsi :

$$a_2 - \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1'}{2} = \text{constante}.$$

Le condition nécessaire et suffisante ainsi obtenue est donc identique à la condition trouvée dans le premier paragraphe, et qui exprime que l'équation [1] peut être transformée en équation à coefficients constants.

2° *Équation du* $n^{ième}$ *ordre.*

Ces résultats peuvent être étendus à l'équation d'ordre n [7].

Pour que l'identité [12] soit satisfaite, les a_i de [7] doivent vérifier $n-1$ relations nécessaires et suffisantes; et ces $n-1$ relations sont identiques à celles qui expriment que l'équation [7] est transformable en l'équation de même forme à coefficients constants au moyen d'un changement $y = \lambda(x) \cdot Y$.

Les calculs nous donnent dans ce cas :

$$G(x) \equiv g(x) = e^{\frac{1}{n}\int a_1 \cdot dx}; \qquad \mu(x) = \frac{a_1}{n}.$$

L'identité des résultats obtenus dans les deux paragraphes peut d'ailleurs se justifier aisément au moyen de la remarque suivante, utilisée par Monsieur Rey Pastor dans la Note que nous avons signalée plus haut : Si Y est une fonction d'une famille de type exponentiel [c'est-à-dire satisfaisant à une équation linéaire et homogéne à coefficients constants], sa dérivée est aussi fonction de la même famille.

3° Soit donc (C) une courbe intégrale de l'équation linéaires et homogène d'ordre n. Au point $M(x, y)$ de (C) faisons correspondre le point $N(X, Y)$ dont les coordonnées X et Y sont liées à x et y par :

$$x = X; \qquad y = Y' + \mu(x) \cdot Y$$

ou bien :

$$X = x$$

$$Y = e^{-\int \mu \cdot dx}\left[c + \int y \cdot e^{\int \mu \cdot dx} \cdot dx\right].$$

La courbe (C), lieu de M satisfait à l'équation [7] : $f = 0$; la courbe (Γ) lieu de N satisfait à l'équation [12] : $F = 0$. Si nous supposons que l'équation [7] soit transformable en équation à coefficients constants au moyen de $y = \lambda(x) \cdot Y$, la courbe (C) satisfait aussi, puisque l'identité [13] se trouve alors satisfaite, à l'équation $F = 0$ qui est d'ordre $n + 1$. En somme :

Si une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre n :

$$f \equiv y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + a_2 \cdot y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0$$

est transformable en équation de même forme à coefficients constants, au moyen de la substitution :

$$y = e^{-\int a_1 \cdot dx} \cdot Y$$

le faisceau de ses courbes intégrales fait partie du faisceau des courbes intégrales de l'équation transformée d'ordre $n+1$:

$$F \equiv Y^{(n+1)} + A_0 . Y^{(n)} + A_1 . Y^{(n-1)} + A_{n-1} . Y' + A_n . Y = 0$$

qu'on obtient en faisant la substitution :

$$y = Y' + \frac{a_1}{n} \cdot Y.$$

Réciproquement, si le faisceau des courbes intégrales d'une équation linéaire et homogène d'ordre n : $f = 0$ fait partie du faisceau des courbes intégrales de l'équation linéaire et homogène d'ordre $n+1$: $F = 0$, transformé de la première au moyen de la substitution :

$$y = Y' + \frac{a_1}{n} \cdot Y,$$

c'est que la substitution

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int a_1 . dx} . Y$$

transforme l'équation $f = 0$ es una équation linéaire et homogène d'ordre n à coefficients constants.

En effet, le faisceau des courbes intégrales de $F = 0$ doii satisfaire, puisqu'il comprend le faisceau des courbes intégrales de $f = 0$ à une équation de la forme :

$$Y^{(n)} + a_1 . Y^{(n-1)} + a_2 . Y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} . Y' + a_n . Y = K . f(x)$$

K étant une constante, $f(x)$ une certaine fonction de x; par conséquent, il satisfait aussi à l'équation linéaire et homogène d'ordre $n+1$:

$$\frac{d}{dx} \{ (K . f(x))^{-1} . [Y^{(n)} + a_1 . Y^{(n-1)} + a_2 . Y^{(n-2)} + \ldots + \\ + a_{n-1} . Y' + a_n . Y] \} = 0.$$

Mais par hipothèse, il satisfait aussi à l'équation linéaire et homogène d'ordre $n+1$: $F = 0$. Il existe donc 3 fonctions $G(x)$; $g(x)$; $f(x)$, telles qu'on a identiquement :

$$G(x) . F \equiv \frac{d}{dx} [g(x) . f]$$

ce qui exprime que l'équation [7] : $f=0$ est transformable en équation à coefficients constants au moyen d'une certaine substitution de la forme :

$$y=\lambda(x).\mathrm{Y}.$$

4° *Conséquence.*

Au point $\mathrm{M}(x, y)$ d'une courbe (C), faisons correspondre le point $\mathrm{N}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tel que :

$$\mathrm{X}=x;$$
$$\mathrm{Y}=y'+f(x).y$$

$f(x)$ étant une fonction quelconque de la variable indépendante x. La transformation ainsi définie n'est pas réciproque en général. L'astreindre à être réciproque, c'est astreindre le point M à décrire une courbe (C) qui satisfait à une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre et l'on peut affirmer *a priori* que cette équation sera transformable en équation à coefficients constants au moyen d'une certaine transformation de la forme [2] :

$$y=\lambda(x).\mathrm{Y}.$$

Cela résulte en effet immédiatement de ce qui précède puisque les faisceaux des courbes intégrales de l'équation et de sa transformée se contiennent l'un l'autre.

D'ailleurs, l'équation différentielle de (C) est :

$$y''+2.f(x).y'+[f'(x)+f^2(x)-1].y=0$$

et nous voyons aisément que la condition exprimée dans le premier paragraphe est bien satisfaite. On obtient ainsi aisément l'intégrale générale de l'équation précédente, qui peut s'écrire sous la forme :

$$y=e^{-\int f(x).dx}.[\mathrm{C}_1.e^x+\mathrm{C}_2.e^{-x}].$$

On vérifiera aisément que l'expression de la transformée est

$$\mathrm{Y}=e^{-\int f(x).dx}[\mathrm{C}_1.e^x-\mathrm{C}_2 e^{-x}].$$