# COMUNICACIONES

## Una aplicación del símbolo $\Delta^m D^m$

Por José Babini
(Santa Fe)

Si se considera una serie de potencias $f(z, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n (hn + \alpha) z^n$ en cuyos coeficientes interviene un parámetro $h$ y se transforman esos coeficientes

$$\varphi_n (hn + \alpha) = \varphi_n (h'n + \alpha + (h - h') n) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \Delta^m \varphi_n (h'n + \alpha)$$

$$\Delta \alpha = h - h'$$

se tendrá, en el círculo de convergencia de la serie,

$$f(z, h) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z^n \Delta^m \varphi_n (h'n + \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{D}^m z^n \Delta^m \varphi_n (h'n + \alpha)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^m \mathrm{D}^m z^n \varphi_n (h'n + \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \Delta^m \mathrm{D}^m f(z, h'),$$

y en los casos particulares en que los coeficientes $\varphi_n$ sean enteros respecto de $\alpha$ se podrá expresar la serie $f(z, h)$ en forma finita. Así, si

$$\varphi_n (hn + \alpha) = a_n \mathrm{P}_p (hn + \alpha)$$

donde $\mathrm{P}_p(\alpha)$ es un polinomio de grado $p$, tendremos, indicando con $y = \sum_{n=0} a_n z^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{P}_p (hn + \alpha) z^n = \sum_{m=0}^{p} \frac{z^m}{m!} \Delta^m \mathrm{D}^m \sum_{n=0} a_n \mathrm{P}_p (\alpha) z^n = \sum_{m=0}^{p} \frac{z^m}{m!} y^{(m)} \Delta^m \mathrm{P}_p (\alpha)$$

con $\Delta\alpha = h$. Por ejemplo, si

$$y = e^z \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_p \frac{(hn+\alpha)}{n!} z^n = e^z \sum_{m=0}^{p} \frac{z^m \Delta^m \mathrm{P}_p(\alpha)}{m!}$$

$$y = \frac{1}{1-z} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_p (hn+\alpha) z^n = \frac{1}{1-z} \sum_{m=0}^{p} \left(\frac{z}{1-z}\right)^m \Delta^m \mathrm{P}^p(\alpha)$$

$$y = (1+z)^\beta$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{(n} \mathrm{P}_p (hn+\alpha)}{n!} z^n = (1+z)^\beta \sum_{m=0}^{p} \left(\frac{z}{1+z}\right)^\beta \frac{\beta^{(m}}{m!} \Delta^m \mathrm{P}_p(\alpha), \text{ etc.}$$

Consideremos, por último, como $f(z, h)$ la serie

$$\sum_{n=0} \frac{(hn+\alpha)^{(n,k}}{n!} z^n,$$

donde $(hn+\alpha)^{(n,k}$ representa la factorial de base $hn+\alpha$, grado $n$ y diferencia $k$. Esta serie, convergente en el círculo de radio

$$\left| \frac{(h-k)^{\frac{h-k}{k}}}{h^{\frac{h}{k}}} \right|$$

teniendo en cuenta que

$$\sum_{n=0} \frac{\alpha^{(n,k}}{n!} z^n = (1+kz)^{\frac{\alpha}{k}},$$

podrá entonces expresarse por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(hn+\alpha)^{(n,k}}{n!} z^n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \Delta^m \mathrm{D}^m (1+kz)^{\frac{\alpha}{k}},$$

con $\Delta\alpha = h$.

# Hiperconvergencia de las series de Dirichlet cuyos exponentes forman una sucesión de densidad máxima infinita

Por Sixto Ríos
(Madrid)

1. Un teorema fundamental de V. Bernstein (1) demuestra que en las series de Dirichlet:

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuya sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}$ tiene densidad máxima finita, las abscisas de holomorfía e hiperconvergencia son iguales, resultado que ha sido generalizado a algunas clases de series de Dirichlet de densidad máxima infinita (2).

Se plantea entonces la cuestión siguiente : en el caso de series de Dirichlet cuya sucesión de exponentes tiene densidad máxima infinita «la abscisa de hiperconvergencia (estrecha o no) debe ser necesariamente igual a la abscisa de holomorfía, o puede suceder que aquélla sea superior a ésta. Del mismo modo, no se sabe si al menos una cierta parte de la banda comprendida entre las rectas de convergencia y holomorfía (cuando dicha banda no es nula) es seguramente un dominio de hiperconvergencia o puede suceder que ninguna parte de dicha banda sea un dominio de hiperconvergencia de la serie» (3).

El objeto de la primera parte de esta nota es resolver esta cuestión demostrando que *en las series de Dirichlet*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

*cuya sucesión de exponentes $\{\lambda_n\}$ tiene densidad máxima infinita la abscisa de hiperconvergencia (estrecha o no) puede ser mayor o igual que la*

(1) *Progrés récents de la théorie des séries de Dirichlet,* página 103, col. Borel, París, 1933.

(2) Libro citado, página 176.

(3) Esta cuestión se encuentra así planteada en el libro de V. Bernstein citado, páginas 193-4.

*de holomorfía,* contrariamente a lo que sucede en las series en que $\{\lambda_n\}$ posee densidad máxima finita, en que ambas abscisas son necesariamente iguales. Objeto principal de la segunda parte es dar un teorema que relaciona las abscisas de hiperconvergencia y holomorfía de las series en que $\{\lambda_n\}$ tiene densidad máxima infinita.

2. Siguiendo la notación de V. Bernstein (¹) designamos con **H**, **O**, **S**, **C** las abscisas de holomorfía, hiperconvergencia, hiperconvergencia estrecha y convergencia respectivamente.

Comenzamos formando la serie de Dirichlet :

$$f(s) = \Sigma (-1)^n e^{-\lambda_n s} \qquad [1]$$

en que

$$\lambda_{2n} = ln, \qquad \lambda_{2n+1} = ln + \frac{1}{n(n+1)},$$

para la cual se demuestra que

$$-\infty = \mathbf{H} < \mathbf{O} = \mathbf{S} = -1 < \mathbf{C} = 0, \qquad [2]$$

y que por tanto resuelve la primera parte del problema de Bernstein.

Se demuestra :

*a)* Si en la serie [1] se agrupan los términos de lugares $2n$ y $2n+1$, la serie de polinomios exponenciales obtenida :

$$\sum_1^\infty \left(e^{-sln} - e^{-s\left(ln + \frac{1}{n(n+1)}\right)}\right)$$

converge uniformemente en todo recinto finito del semiplano $R(s) > -1$ con lo cual resulta

$$\mathbf{O} \leq \mathbf{S} \leq -1;$$

*b)* Cualquier sucesión parcial de la sucesión total de sumas parciales de la serie numérica

$$\sum_1^\infty u_n, \qquad \left(u_{2n} = n, \qquad u_{2n+1} = -ne^{\frac{1}{n(n+1)}}\right)$$

obtenida haciendo $s = -1$ en [1], es divergente, con lo que resulta : $-1 < \mathbf{O}$ y, por tanto

$$\mathbf{O} = \mathbf{S} = -1;$$

*c)* La serie de Dirichlet

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty (-1)^n e^{-e^{\lambda_n} s}$$

(¹) *Loc. cit.*, páginas 32-33.

define una función analítica regular en $s = 0$, ya que por formar sus exponentes una sucesión de densidad máxima finita se le pueda aplicar un teorema de V. Bernstein [1].

Pero de un teorema de Hardy [2] resulta que por ser $\varphi(s)$ holomorfa en $s = 0$ es $f(s)$ una función entera, es decir, $\mathbf{H} = -\infty$ con lo que queda demostrada la relación [2].

3. Queda en pie la parte de cuestión relativa a si necesariamente una banda parcial de la banda de holomorfía es campo de hiperconvergencia, en estas series. La contestación es negativa, como se ve aplicando el método precedente a la serie

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-sln}$$

para la que resulta :

$$-\infty = \mathbf{H} < \mathbf{0} = \mathbf{S} = \mathbf{C} = 0.$$

4. También en las series con sucesión $\{\lambda_n\}$ de densidad máxima infinita puede presentarse el caso de que $\mathbf{H} = \mathbf{0} = \mathbf{S} > \mathbf{C}$, es decir,

(1) El teorema se enuncia así : *Sea la serie*

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

*de abscisa de convergencia finita y cuya sucesión de exponentes* $\{\lambda_n\}$ *es medible y de densidad* D. *Una condición necesaria y suficiente para que* $f(s)$ *sea holomorfa en* $\mathrm{R}(s) < 0$ *sobre el segmento* $|t| < l$ *del eje imaginario es que exista una función* $\varphi(z)$ *tal que :* 1º *Sea holomorfa en el sector*

$$|\arg z| \leq d < \frac{\pi}{2}$$

*y satisfaga en él, por pequeño que sea* $\varepsilon$ *y para* $|z|$ *suficientemente grande, la condición*

$$|\varphi(z)| < e^{|(\pi \mathrm{D} - e)|\operatorname{sen}\theta| + \varepsilon[r};$$

2º *Para todos los valores de* $n$ *:* $\varphi(\lambda_n) = a_n \mathrm{C}'(\lambda_n)$, *loc. cit.*, página 103.

(2) El teorema se enuncia así : *Si la serie*

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

*tiene abscisa de convergencia finita y la serie*

$$\Sigma a_n e^{-se\lambda_n}$$

*define una función holomorfa en el origen, la función definida por la serie*

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

*es entera. (The application to Dirichlet's series of Borel's method of summation, Proc. London Math. Loc. cit.*, tomo VIII, 1909.)

hiperconvergencia estrecha en que todo el semiplano de holomorfía, que es el único caso que se presenta en las series en que $\{\lambda_n\}$ posee densidad máxima finita estudiadas por V. Bernstein.

El mismo método seguido en los ejemplos anteriores conduce a demostrar que, en efecto, para la serie :

$$\sum_1^\infty (-1)^n e^{-\lambda_n s}, \quad [\lambda_{2n} = ln, \quad \lambda_{2n+1} = ln + e^{-n} - e^{-(n+1)}]$$

se verifica

$$-\infty = \mathbf{H} = \mathbf{0} = \mathbf{S} < \mathbf{C} = 0.$$

5. Con las hipótesis hechas para la serie $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$ en el teorema de Bernstein enunciado en la nota (1) y en virtud de otro teorema de Bernstein (2) se pueden agrupar los términos de aquélla serie, obteniéndose una serie de polinomios exponenciales

$$f(s) = \sum_1^\infty \mathrm{P}_k(s) \qquad [3]$$

hiperconvergente en el semiplano $\mathrm{R}(s) > -h$ y se puede poner en forma de serie de Dirichlet de coeficientes variables :

$$f(s) = \sum_1^\infty \mathrm{A}_k(s)\, e^{-\lambda_{n_k} s} \qquad [4]$$

en que los coeficientes verifican la acotación :

$$|\mathrm{A}_k(s)| < e^{-(h-\varepsilon)\lambda_{n_k}}. \qquad [5]$$

y consideramos la serie

$$\varphi(s) = \Sigma a_n e^{-s \cdot l\lambda_n}$$

y la de polinomios correspondientes a la [3]

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty p_k(s) \qquad [6]$$

se ve fácilmente que

$$p_k(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{P}_k(x)\, x^{s-1} dx \qquad [7]$$

(1) *Loc. cit.*, página 128.

(2) *Bemerkungen zum Konvergenzprobleme...*, Rend. Pal., 1913.

de donde se obtiene con un cálculo sencillo la acotación :

$$|p_k(s)| < e^{-(h-\varepsilon)\lambda_{n_k}} e^{-s\,.\,l\lambda_{n_k}} \qquad [8]$$

que permite afirmar que la serie [6] converge uniformemente en todo recinto finito del plano $s$. Esto nos conduce a enunciar el siguiente teorema :

I. *Sea* $\{\lambda_n\}$ *medible y de densidad* $D$. *Si la abscisa de convergencia de la serie*

$$f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}$$

*es cero, es condición suficiente para que la serie*

$$\varphi(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-s\,.\,l\lambda_n}$$

*admita una sucesión parcial hiperconvergente en todo el plano, que exista una función* $\psi(z)$ *holomorfa en*

$$|\arg z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$

*y tal que se verifique en este sector para* $|z|$ *suficientemente grande, y por pequeño que sea* $\varepsilon$, *la condición*

$$|\psi(z)| < e^{-r[h\cos\Theta - \pi D|\operatorname{sen}\Theta| - \varepsilon]} \quad (h > 0, \quad z = re^{i\Theta})$$

*y que además para todo valor de* $n$ *sea*

$$\psi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n).$$

Para la abscisa de holomorfía se obtiene un resultado análogo mediante los teoremas de Hardy (¹) y Bernstein enunciados en las notas al pie (¹) y (²) de la página 73.

II. *En las mismas hipótesis del teorema I, es condición suficiente para que la serie*

$$\varphi(s) = \Sigma a_n e^{-s\,.\,l\lambda_n}$$

*defina una función entera, que exista una función* $\psi(z)$ *holomorfa en*

$$|\arg z| \leq \alpha < \frac{\pi}{2},$$

(¹) Hardy-Riesz, página 18.

*y tal que se verifique en este sector para $|z|$ suficientemente grande y por pequeño que sea $\varepsilon$ la condición*

$$|\psi(z)|\, e^{-r[h \cos\Theta - \pi D |\operatorname{sen}\Theta| - \varepsilon]} \qquad (h \geq 0, \quad re^{i\theta})$$

*y que además para todo valor de $n$ sea*

$$\psi(\lambda_n) = a_n C'(\lambda_n).$$

Se observa que en la condición final de este teorema no aparece $h > 0$ como en el teorema I.

Si suponemos $h = 0$ de la fórmula [7] se obtiene la acotación

$$p_k(s) \,|< \text{Máx}\, |t_k(s)|\, e^{-sl\lambda_{n_k}} \qquad [9]$$

más general que la [8]. Ello nos permite enunciar el siguiente teorema :

III. *Si la abscisa de convergencia de la serie*

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

*es cero y si además existe una función $\psi(z)$ con las propiedades señaladas en el teorema II, la abscisa de hiperconvergencia estrecha de la serie*

$$\psi(s) = \Sigma a_n{}^{-sl\lambda_n}$$

*está determinada por la fórmula*

$$\mathbf{S} = \overline{\lim} \frac{\log [\text{Máx}\, |A_k(s)|]}{l\lambda_{n_k}}$$

Ejemplos de las series a las que se aplican estos teoremas son los expuestos en los párrafos 2, 3 y 4.

6. Sin servirse de la acotación [5] de Bernstein, y mediante la expresión [7] y el teorema de los tres círculos, se obtiene un teorema del que resulta como caso particular el teorema I :

IV. *Si una sucesión parcial de la serie*

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

*converge uniformemente en un entorno de $s = 0$ y la serie*

$$\varphi(s) = \Sigma a_n e^{-sl\lambda_n}$$

*tiene abscisa de convergencia finita, la sucesión de los mismos índices relativa a esta serie, converge uniformemente en todo recinto finito del plano.*

7. Se observa que los teoremas precedentes han permitido obtener las abscisas de hiperconvergencia y holomorfía de la serie

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

de propiedades relativas a la serie

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n^{(1)} s}$$

en que $\lambda_n^{(1)} = e^{\lambda_n}$ suponiendo que $\{\lambda_n\}$ sea medible o, más general, de densidad máxima; pero si $\{\lambda_n^{(1)}\}$ no es de densidad máxima finita, y si lo es la sucesión $\{\lambda_n^{(2)}\}$ (tal que $\lambda_n^{(2)} = e^{\lambda_n^{(1)}}$), una aplicación reiterada de los teoremas precedentes permite pasar de las propiedades de la serie

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

a las abscisas de hiperconvergencia y holomorfía de la serie

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n^{(2)} s};$$

y, en general, de la

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n^{(k)} s}$$

a la

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n s}.$$

Ahora bien, se demuestra fácilmente al siguiente teorema :

V. *Dada una sucesión $\{\lambda_n\}$ de densidad máxima infinita, entre las sucesiones $\{\lambda_n^{(k)}\}$ existe una primera, para un cierto valor finito de $k$, que es de densidad máxima finita.*

Este teorema final pone de manifiesto el alcance de nuestros teoremas que se extienden, pues, a toda las series de Dirichlet.

8. Recordemos finalmente el importante teorema de Bohr (8) siguiente :

*Sea la serie*

$$f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$$

*cuyos exponentes verifican la condición*

$$\overline{\lim} \frac{\log n}{\lambda_n} = \mathrm{L} < +\infty,$$

*mientras que sus coeficientes $a_n$ son tales que*

$$\overline{\lim}\,\frac{\log|a_n|}{\lambda_n} = 0,$$

*supongamos además que $f(s)$ es holomorfa y de orden finito $k$ en un cierto semiplano $\mathrm{R}(s) > \sigma$, entonces se verifica que la abscisa de hiperconvergencia es :*

$$\mathbf{0} \leq \frac{\sigma + k\mathrm{L}}{1 + k}.$$

Una aplicación del ejemplo del § 3 consiste en probar que la acotación dada por el teorema de Bohr no puede mejorarse, en general; pues si para dicha serie fuera

$$\mathbf{0} \leq \frac{\sigma + k\mathrm{L}}{1 + k} - \varepsilon,$$

teniendo en cuenta que para dicha serie es $\mathrm{L} = 1$, y

$$\mu(\sigma) = \frac{1}{1} - \sigma \; (9),$$

si se toma

$$\sigma < -\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{3}{2}\right),$$

resulta

$$\mathbf{0} \leq -\frac{\varepsilon}{2},$$

lo que está en contradicción con lo demostrado en § 3.

Madrid, diciembre de 1936.

# Algunos complementos a la teoría de límites de las funciones reales en espacios abstractos

Por J. Rey Pastor
(Buenos Aires)

TEOREMAS SOBRE LÍMITES DOBLES. — Como complemento a la teoría desarrollada en nuestra «Teoría general de funciones» (1), definidas en espacios topológicos, damos algunos teoremas cuya demostración, que omitimos por falta de espacio, es sencilla, apoyándose en los fundamentos allí expuestos, o bien en las clásicas lecciones de Hahn.

Sea $f(x, y)$ una función real definida en un semientorno del punto $(x_0, y_0)$ del espacio abstracto topológico $E_x \times E_y$, es decir, en un semientorno $X_0$ de $x_0$ y en un semientorno $Y_0$ de $y_0$. Adoptaremos estas notaciones:

$$\overline{\lim}_{x_0} f(x, y) = L(y) \qquad \underline{\lim}_{x_0} f(x, y) = l(y)$$

$$\overline{\lim}_{y_0} L(y) = L \qquad \underline{\lim}_{y_0} l(x) = l$$

$$\overline{\lim}_{x_0, y_0} f(x, y) = \Lambda \qquad \underline{\lim}_{x_0, y_0} f(x, y) = \lambda.$$

De acuerdo con los conceptos introducidos en nuestra citada obra, estableceremos las siguientes definiciones:

La *oscilación superior* de $f(x, y)$ en el punto $x_0$ es *uniforme hacia arriba* en el conjunto Y si para cada $\varepsilon > 0$ hay un semientorno $X_0(\varepsilon)$ de $x_0$ tal que para cada $x$ de $X_0(\varepsilon)$ y cada $y$ de Y se verifica:

$$f(x, y) < L(y) + \varepsilon \qquad (x < X_0(\varepsilon),\ y < Y). \tag{1}$$

Diremos que la oscilación superior es *uniforme hacia abajo* en Y si en cada semientorno $X_i$ de $x_0$ hay algún punto $x_i$ tal que

$$f(x_i, y) > L(y) - \varepsilon \qquad (x_i < X_i,\ y < Y). \tag{2}$$

Análogamente se dirá que la *oscilación inferior* en $x_0$ es *uniforme hacia abajo* en Y si para cada $\varepsilon > 0$, se verifica:

$$f(x, y) > l(y) - \varepsilon \qquad (x < X_0(\varepsilon),\ y < Y) \tag{3}$$

(1) Curso dictado en la Universidad de Buenos Aires, capítulo I, 1935.

*y uniforme hacia arriba* si

$$f(x, y) < l(y) + \varepsilon \qquad (x_i < X_i,\ y < Y). \tag{4}$$

Diremos que la *oscilación superior* (inferior) hacia arriba o hacia abajo es *uniforme en el punto* $y_0$ si las condiciones anteriores se verifican en un conjunto $Y(\varepsilon)$, semientorno de $y_0$, que depende de $\varepsilon$.

Si en (1) se sustituye $L(y)$ por $f(x_0, y)$ resulta la continuidad supe rior respecto de $x$, *uniforme en* $Y$; y si en (3) se sustituye $l(y)$ por $f(x_0, y)$ resulta la continuidad inferior respecto de $x$, *uniforme* en $Y$.

Si en esta continuidad lateral respecto de la variable $X$, uniforme respecto del parámetro $y$ (también llamada *equicontinuidad*) el conjunto $Y$ es un semientorno $Y_0(\varepsilon)$ de $y_0$ dependiente de $\varepsilon$, resulta la continuidad superior o inferior, *uniforme en el punto* $y_0$.

Finalmente, la continuidad respecto de $x$ *uniforme en el punto fijo* $y_0$ es la suma de ambas continuidades y puede caracterizarse también así:

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon \qquad (x < X_0(\varepsilon),\ y < Y_0(\varepsilon))$$

siendo $Y_0(\varepsilon)$ un entorno de $y_0$ dependiente de $\varepsilon$, mientras que en la equicontinuidad es fijo.

Los teoremas anunciados, de los cuales se pueden deducir muchos otros aplicables a series, integrales en campos infinitos, etc., son los siguientes:

TEOREMA I. — *Si la oscilación superior de* $f(x, y)$ *en* $x_0$ *es uniforme en el punto* $y_0$ *hacia arriba, es* $\Lambda \leq L$; *si es uniforme hacia abajo, es* $\Lambda \geq L$.

Por tanto, si es uniforme en ambos sentidos es $\Lambda = L$.

Análogamente, si la oscilación inferior es uniforme hacia arriba es $\lambda \leq l$, y si es uniforme hacia abajo es $\lambda \geq l$.

TEOREMA II. — *Condiciones necesarias y suficientes para la existencia del límite doble* $\Lambda = \lambda$ *en el punto* $(x_0, y_0)$ *son:*

1° *Oscilación en* $x_0$, *superior hacia arriba e inferior hacia abajo, uniformes en el punto* $y_0$;

2° $L = l$.

Que estas condiciones son suficientes resulta como corolario del teorema anterior. Condiciones equivalentes, necesarias y suficientes, se obtienen permutando $x_0$ con $y_0$.

TEOREMA III. — *Condiciones suficientes para la continuidad superior (inferior) de* $f(x, y)$ *en el punto* $(x_0, y_0)$ *son :*

1° *Continuidad superior (inferior) en* $x_0$ *de la función* $f(x, y_0)$;

2° *Continuidad superior (inferior) de* $f(x, y)$ *respecto de* $x$ *en* $x_0$, *uniforme en el punto* $y_0$.

Su demostración directa es sencilla y más breve todavía es deducirlo del primero.

TEOREMA IV. — *Condiciones necesarias y suficientes para la continuidad de* $f(x, y)$ *en un punto* $(x_0, y_0)$ *son :*

1° *Continuidad respecto de* $y$ *en* $y_0$ *para* $x = x_0$;

2° *Continuidad respecto de* $x$ *en* $x_0$, *uniforme en el punto* $y_0$.

APLICACIÓN A LOS ALGORITMOS INTEGRALES DE CONVERGENCIA. — En diversas ocasiones hemos expuesto un doble teorema (¹) sobre los algoritmos integrales de convergencia, análogo a los ya conocidos para los algoritmos sumatorios y que se extiende fácilmente a las curvas situadas en un espacio topológico :

TEOREMA I. — *Son condiciones* SUFICIENTES *para la conservación del límite nulo de las sucesiones y funciones acotadas :*

$$\text{I)} \qquad \lim_{t \to t_0} \lambda_r(t) = 0 \qquad \lim_{t \to t_0} \int_p^q |\lambda(r, t)|\, dr = 0$$

*para todo intervalo finito* $(p, q)$ *siendo* $t_0$ *un punto de un espacio topológico y* $r$ *un parámetro real que define el camino de integración* $(c, \infty)$.

$$\text{II)} \qquad \sum_c^\infty |\lambda_r(t)| < \mathrm{K} \qquad \int_c^\infty |\lambda(r, t)|\, dr < \mathrm{K}$$

*para cada* $t$ *de un semientorno* $\mathrm{T}_0$ *de* $t_0$.

Es decir, de las condiciones I y II se deduce :

(¹) *Series divergentes*. Curso de 1926, Madrid, 1927. *Un algoritmo general de convergencia*, en *Rev. Mat. Hisp.-Amer.*, 1929. *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, Buenos Aires, 1931.

Aunque nunca atribuímos importancia a este teorema (véase el prólogo del libro citado) por existir ya los modelos de Lebesgue y Toeplitz en problemas análogos, el señor Raff parece concedérsela excesiva, cuando tanto empeño pone en asignar la fecha de 1929 a la memoria publicada por su maestro y colega de la Universidad de Tübingen, el profesor Knopp, en *Math. Zeitschrift*, volumen 31 (1930), quien demostró independientemente el mismo teorema. Véase la reseña del señor Raff en el *Jahrbuch über die Fortsch. der Math.*, $55_{\mathrm{I}}$, página 124, sobre nuestra nota, y en el $55_{\mathrm{II}}$ (aparecido en 1936, aunque lleva la fecha de 1929), sobre la memoria de Knopp.

Lamentamos la molestia que parecen causarle las fechas, pero nada cabe hacer para remediarlo.

Si $s(r)$ está acotada y si $s(r) \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$ se verifica :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_c^\infty \lambda(r, t)\, s(r)\, dr = 0.$$

De este teorema resultan fácilmente condiciones *suficientes* para la regularidad del algoritmo (conservación de límites finitos), agregando la condición :

$$\text{III)} \qquad \lim_{t \rightarrow t_0} \sum_c^\infty \lambda_r(t) = 1 \qquad \lim_{t \rightarrow t_0} \int_c^\infty \lambda(r, t)\, dr = 1.$$

En nuestro libro ya citado ([2]), página 44, completamos este teorema con otro que parcialmente es recíproco, cuyo enunciado copiamos literalmente :

« TEOREMA II. — *Es condición* NECESARIA *para la conservación de los límites nulos que para cada valor de $r$ se verifique :*

$$\text{I}' \qquad \lim \lambda_r(t) = 0 \qquad \lim \int_p^q \lambda(r, t)\, dr = 0 \qquad \text{para} \qquad t \rightarrow \infty. \text{»}$$

Salta a la vista que si bien para las sucesiones $s_r$ la condición *necesaria* de la izquierda $\lim \lambda_r(r) = 0$ es la misma que la condición *suficiente,* contenida en el teorema I, no acontece lo mismo para las funciones $s(r)$, pues en esta condición *necesaria* figura como integrando el factor de convergencia $\lambda(r, t)$, mientras que en las condiciones *suficientes* figura el valor absoluto $|\lambda(r, t)|$.

Tenemos, pues, para las funciones $s(r)$, dos condiciones *necesarias :*

$$\text{I}') \quad \lim \int_p^q \lambda(r, t)\, dr = 0 \qquad\qquad \text{II}) \quad \int_c^\infty |\lambda(r, t)| < \text{K}$$

y dos condiciones *suficientes,* I y II, claramente separadas en los enunciados y en las demostraciones. Sin embargo, el señor Raff, quizá por causa del idioma, lo ha entendido de otro modo ([1]).

([1]) Debemos declarar, en justificación de la agria crítica *(Jahrbuch,* $57_{\text{I}}$, pág. 255) que en algunos párrafos del libro (recopilación de apuntes de clase, cuya accidentada impresión ya insinuada en su prólogo, obligó a lanzarlo incompleto en forma de fascículo primero, cortando varios capítulos, la reseña histórico-bibliográfica y hasta el índice general) se deslizó la frase *condiciones necesarias y suficientes,* siendo innecesario aclarar que estrictamente se refiere a la columna de la izquierda (sucesiones); para la columna de la derecha (funciones) convendría quizás agregar « y las » antes de la palabra *suficientes,* y así se hizo ya en la fe de erratas agregada al libro para evitar malentendidos. Inconvenientes son éstos de la

En la conferencia dada en 1933 en el *Seminario Matematico e Fisico di Milano* (1) hemos subrayado esta laguna existente entre ambas condiciones, adoptando como punto de partida en la definición de los factores la condición *necesaria*

$$\mathrm{I}' \qquad \lim_{t \to t_0} \lambda_r(t) = 0 \qquad \lim_{t \to t_0} \int_p^q \lambda(r, t)\, dr = 0$$

que es la menos exigente, a fin de completarla con condiciones suplementarias en cada tipo de problemas, a la manera de Lebesgue. He aquí el párrafo aludido (pág. 195), copiado literalmente (2) :

« El teorema fundamental expresa :

« *Para todo factor de convergencia se verifica :*

$$\textit{si} \qquad s_r \to 0 \qquad \textit{también} \qquad \mathrm{S}(t) \to 0.$$

« *Si existe coeficiente de convergencia y*

$$s_r \to s \qquad \textit{se verifica} \qquad \mathrm{S}(t) \to \lambda s.$$

exposición simultánea, de dos teorías, cuya correlación no es completa, agravada con la limitación de espacio, que obligó a una condensación excesiva ; pero estando como están bien bien claros los enunciados y las demostraciones de los dos teoremas fundamentales, todo lector de buena fe deberá interpretarla correctamente ; preferimos, pues, la explicación arriba apuntada, que es la más favorable al riguroso crítico.

También es interesante reproducir su otra censura : « El relator considera como falta grave que escasean las indicaciones bibliográficas ; una obra que pretenda ser estimada como trabajo sistemático y propulsivo no puede prescindir de ellas y ciertamente no hay imposibilidad de agregar datos bibliográficos aun en las *circunstancias más difíciles* ».

Criterio tan estrictamente germánico, erigido en dogma, condena sin apelación a casi toda la literatura matemática francesa, pero deja indenne del fulminante anatema a nuestro modesto trabajo, cuyos capítulos finales y bibliografía *completa* hasta el día, esperan pacientemente que la comisión de publicaciones de la Facultad disponga de fondos para imprimir los pliegos restantes que deben completar el fascículo. Un resumen de ello, forzosamente breve, fué publicado aparte.

(1) *Rendiconti del Sem. Mat. Fis. Mil.*, volumen VII, 1933.

(2) Solamente hemos corregido una falta de puntuación : un punto y aparte que debía ser punto y seguido, o viceversa ; bien insignificante si se tiene en cuenta que fué impresa la conferencia en castellano y sin ver nosotros las pruebas.

También está bien claro el párrafo que sigue relativo a las sucesiones :

« Para que la sumatriz de toda *sucesión* convergente tenga límite finito es *preciso* que exista coeficiente de convergencia finito. Como corolario resulta que las condiciones *necesarias y suficientes* para la conservación de todos los límites finitos son : que se cumplan las condiciones I y II y exista coeficiente $\lambda = 1$. »

« *Recíprocamente, para que la sumatriz de toda variable que tienda a cero tienda también a cero, es* NECESARIO *que las funciones* $\lambda_r(t)$, $\lambda(r, t)$ *sean factores de convergencia, es decir, cumplan las condiciones 1 y II.* »

Todo lector verá claramente que en la primera parte (condiciones *suficientes*) sólo se citan las *sucesiones* $s_r$, y en la segunda (condiciones *necesarias*) se habla de toda variable *(sucesión* o *función)* y se escriben ambos tipos de factores $\lambda_r(t)$, $\lambda(r, t)$. Sin embargo, el escrupuloso crítico tubinguiano (y aquí no cabe la disculpa del idioma, pues se trata de fórmulas) nos atribuye como textual un enunciado elaborado a su manera, compuesto con un trozo de la definición, otro del teorema y otro original, de cuyo conglomerado resulta la conclusión inexacta que necesita para poder afirmar que el problema por él abordado en su memoria de *Math. Zeitsch.*, página 605 (1936), es nuevo [1].

Esta novedad es muy relativa después de los numerosos trabajos publicados sobre integrales singulares, de los cuales se pueden cosechar métodos y resultados útiles para la teoría de los algoritmos; y por ello no concedimos mayor interés que el didáctico a nuestro complemento posterior [2] encaminado a llenar la laguna entre las condiciones necesarias y las suficientes, sin más que utilizar, convenientemente modificada, una idea de Lebesgue contenida en su famosa memoria de los *Annales de Toulouse.* Así dimos como suficiente para la conservación de límites nulos, el siguiente criterio intermedio entre las condiciones expuestas en los teoremas I y II; criterio que resulta también necesario :

I″. *Condición necesaria y suficiente para que un factor de convergencia (es decir que cumple las condiciones I′ y II) conserve los límites nulos de las funciones acotadas es que la integral indefinida de su módulo sea uniformemente continua respecto de* $r$ *en el punto* $t_0$.

Como es sabido, toda integral indefinida es función continua de $r$; la única condición que le imponemos es por tanto la *uniformidad* en el punto $t_0$, a la cual se le pueden dar formas muy variadas, y de este teorema fundamental se deducen los otros, como ya se expuso en nuestro libro.

El señor Raff parte en su última memoria ya citada de otro criterio que en esencia coincide con el dado por Lebesgue para la convergencia de la sumatriz de toda función integrable y acotada; pero

(1) *Jahrbuch*, volumen $59_{\text{II}}$, página 968.

(2) Asociación española para el progreso de las Ciencias, 1934.

estudia en especial los modificaciones que deben introducirse para las integrales de Riemann y llega a este resultado [1] :

Las condiciones necesarias y suficientes a fin de que para cada función $f(r)$ de la clase C exista la correspondiente $S(t)$ en un entorno de $t_0$ y sea $\lim S(t) = 0$, son las siguientes :

(1) Que $\lambda(r, t)$ sea absolutamente integrable en un entorno de $t_0$ y exista un número $M > 0$, tal que para cada $t$ de un entorno de $t_0$ permanezca

$$\int_{\mathbf{M}} |\lambda(r, t)|\, dr \leq M;$$

(2ª′) Que para cada intervalo $i$ tal que sea positiva su distancia al punto singular $r_0$, exista

$$\lim_{t \to t_0} \int_{i\mathbf{M}} \lambda(r, t)\, dr = 0;$$

(3′) Que para cada sucesión de conjuntos $\mathbf{N}_\varkappa$ parciales de $\mathbf{M}$ tales :

1° que $r_0$ esté a distancia positiva de un cierto $\mathbf{N}_\varkappa$;

2° que $\mathbf{N}_{\varkappa+1}$ sea conjunto parcial de $\mathbf{N}_\varkappa$;

3° que para cada $i$ sea

$$\lim_{\varkappa \to \infty} |i\mathbf{M}_\varkappa| = 0,$$

se verifique :

$$\lim_{\substack{\varkappa \to \infty \\ t \to t_0}} \int_{\mathbf{N}_\varkappa} |\lambda(r, t)|\, dr = 0.$$

La generalidad de este teorema es más aparente que real [2], y su contenido se reduce en substancia a ésto : las condiciones necesarias y suficientes son :

(1) Claramente se ve que es nuestra condición II;

(2ª′) Aclarado (véase nota [1] al pie) el barroquismo de la expresión, es evidentemente idéntica a nuestra condición I′;

(1) Adoptamos nuestra notación para las variables, a fin de facilitar la comparación.

(2) En efecto, las demostraciones de Lebesgue que este genial creador se complace en dar bajo la apariencia más modesta y con el máximo alcance, se aplican, sin esfuerzo ni gloria (bien lo sabía Lebesgue sin decirlo), a integrales definidas en conjuntos medibles cualesquiera ; y considerar integrales de Riemann sobre conjuntos cualesquiera medibles es sacar las ideas de quicio. Puesto a generalizar, pudo hacerlo a los espacios abstractos, siquiera a los métricos, ya que no a los topológicos, como hemos hecho en los teoremas que inician esta nota ; y así habría podido notar el autor cuán impropia resulta su expresión, que aplicada al caso de los intervalos dice « que el punto $\infty$ tenga distancia *positiva* del intervalo $i$ » para expresar la simplicísima condición de que éste sea *finito*.

(3′) Sin más que aplicar nuestro teorema 2 ó 4, o bien directamente, resulta inmediatamente que equivale a nuestra condición I″.

El criterio del señor Raff coincide, por consiguiente, con uno de los nuestros.

Conviene puntualizar además, para delimitar claramente la frontera entre las condiciones necesarias y las suficientes, que las condiciones I′ y II, dadas como *necesarias* en nuestro teorema II relativo a los algoritmos de convergencia, son también *suficientes* si el factor $\lambda\,(r, t)$ está acotado desde un valor de $t$ en adelante, como acontece en todos los algoritmos que por ofrecer interés han merecido estudio especial.

Diciembre 1936.

*Nota.* — A punto de tirarse este pliego llega una carta del doctor Raff en que da amables explicaciones, proclama la exactitud de nuestros teoremas y reconoce las inspiraciones que debe a nuestro trabajo.