BIBLIOGRAFIA

M. Fréchet.—*Méthode des Fonctions Arbitraires. Théorie des Evenements en Chaine dans le cas d'un nombre fini d'états possibles.*—París, Gauthier Villars, 1938. Un vol. de 316 págs.

El desarrollo activísimo del Cálculo de Probabilidades, agregado al hecho de que muchas memorias importantes aparecen en publicaciones académicas de difícil acceso, y redactadas en idiomas menos accesibles todavía, (escuela rusa, escuela de Brno), le hacen hoy difícil, aun al profesional, orientarse en la espesa maraña probabilista. Llega, pues, muy a tiempo este excelente libro del ilustre profesor de la Sorbona, que contiene la primera exposición sistemática de la Teoría de Probabilidades en cadena.

Nacida del deseo consciente de Markhoff, de generalizar las propiedades de los sucesos y variables aleatorias independientes, de manera suficientemente amplia para que, por una parte, la teoría abarcara la mayor cantidad de casos que se presentan efectivamente en la Física y en la Técnica, y que, por otra, fuera posible extender la mayor cantidad posible de los teoremas clásicos, la teoría de las Probabilidades en cadena ha realizado en los últimos grandísimos progresos. Del caso de un número finito de casos posibles, y un número discreto de pruebas, con probabilidad de tránsito independiente del rango de la prueba (cadena constante), se pasó al de la cadena múltiple, al de la cadena variable (probabilidad de tránsito dependiente del rango de la prueba), luego al caso en que las pruebas forman un conjunto contínuo, y por último al caso más general, en que tanto el número de pruebas como el número de estados forman un conjunto contínuo. Razones de espacio y de tiempo han inclinado al Prof. Fréchet a no abordar sino el caso más sencillo, en que la teoría ha cristalizado en resultados más definitivos, a saber, el estudio de las cadenas simples y constantes. Pero lo ha hecho de manera tan completa y didáctica, que su exposición servirá seguramente de modelo a futuras generalizaciones, y es, desde ahora, punto de referencia indispensable para todo el que se ocupe de estas cuestiones.

Después de un primer capítulo donde estudia a manera de introducción —y con muy acertado criterio didáctico— algunos ejemplos clásicos (problema de las urnas, problema de la baraja) que le dan ocasión para establecer las conocidas fórmulas fundamentales de recurrencia en donde intervienen las probabilidades de tránsito, que aparecerán luego casi a cada página en el resto del libro, entra de lleno en materia, en el capítulo segundo, cuya sección primera está dedicada al estudio del comportamiento asintótico de las probabilidades cuando el número de pruebas es discreto. Aborda primero el problema por el procedimiento seguido por el creador de la teoría, y perfeccionado por numerosos investigadores que siguieron los rumbos por él marcados, completándolo en puntos importantes, por ejemplo, el que se refiere a las cadenas inversas, estudiadas recientemente por Bersntein, Hostinsky, Kolmogoroff y otros matemáticos. Aborda luego el mismo problema, pero siguiendo el método más poderoso introducido por Poincaré, que reduce la cuestión a la resolución de un sistema de ecuaciones en diferencias finitas. Aquí aparece la famosa ecuación secular, y el enlace de la teoría con las fundamentales investigaciones, puramente algebraicas, de Frobenius. Abundan en este capítulo los aportes originales del autor, que ha completado y precisado en varios puntos importantes los resultados de Frobenius.

Expone a continuación el método directo de Hadamard, completado en puntos fundamentales por Kolmogoroff, que tiene la ventaja no pequeña, sobre el de Poincaré-Romanowsky, de prescindir del cálculo de matrices y del aparato algebraico de Frobenius.

La sección segunda está dedicada al estudio del caso en que permaneciendo siempre finito el número de estados posibles, las pruebas forman una sucesión contínua. El planteo del problema conduce en este caso, como es bien sabido, a un sistema de ecuaciones funcionales, y no en diferencias finitas, como en el caso discreto. Se trata de resolver el sistema, y estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones, cuando la variable tiende a infinito. Expone el autor, completándolo, el clásico método de Kolmogoroff, consistente en reducir la solución del sistema de ecuaciones funcionales a la integración de un sistema canónico de ecuaciones diferenciales lineales, imponiéndole a las funciones que intervienen, ciertas restricciones "a priori" (continuidad y derivabilidad). Expone la demostración de Kolmogoroff, dilucidando algunos puntos delicados de la misma, y luego generaliza el método del gran probabilista ruso, a fin de obtener soluciones más generales (contínuas y de variación acotada y absolutamente contínuas). Se ocupa luego con detalle del método de Hostinsky, que tiene sobre el de Kolmogoroff la ventaja de que da la expresión explícita de la solución, y consiste en integrar las ecuaciones diferenciales planteadas por este último por el sistema de aproximaciones sucesivas. Este método permite obtener todas las soluciones contínuas de derivada contínua. El autor da una generalización del método Hostinsky, que le permite obtener la solución absolutamente contínua más general, y también la solución más general contínua y de variación acotada. Estos resultados son importantes, abstracción hecha de su transcendencia para el cálculo de probabilidades, porque son independientes de ese cálculo y pueden tener importantes aplicaciones a otras ramas de la Matemática. Expone por último —*last but non least*— el método desarrollado por el autor en su memoria de 1932 (Bull. de la Soc. Math. de France), que da una expresión mucho más simple de la solución.

El libro termina por cuatro apéndices donde están consignados los resultados matemáticos, no clásicos, utilizados en el mismo, y está enriquecido por una extensa bibliografía y un índice alfabético.

A. G. D.

GARCÍA, GODOFREDO.—*Lecciones de Mecánica Racional.* Un vol. de 300 páginas. Lima, 1938.

El ingeniero Godofredo García, benemérito decano de la Facultad de Ciencia de la Universidad Mayor de San Marcos de Lima, ha dado a publicidad un volumen de Mecánica Racional que comprende la teoría de vectores y la cinemática.

Un rápido examen de la obra ofrece de primer intento la impresión de un libro esencialmente didáctico y claro.

Después de una introducción de carácter general, en el capítulo primero se ocupa de la teoría elemental de vectores libres y aplicados. El capítulo segundo lo dedica a las funciones vectoriales de una variable, terminándolo con la aplicación al estudio elemental de la geometría diferencial en lo que se relaciona con las curvas.

En el capítulo tercero estudia las funciones de punto, los operadores diferenciales y las principales fórmulas integrales relativas a campos vectoriales.

El capítulo cuarto se ocupa de la cinemática del punto móvil y del estudio de los principales casos particulares: movimiento periódico, armónico, vibratorio amortiguado, y helicoidal uniforme.

En el capítulo quinto da los elementos esenciales de la cinemática del cuerpo rígido y en el sexto trata la teoría del movimiento relativo. El capítulo séptimo está dedicado al estudio del movimiento del cuerpo rígido con un punto fijo y en particular a la precesión regular. El octavo y último capítulo trata el movimiento plano rígido.

El tomo termina con tres notas complementarias del capítulo referente al cálculo vectorial.

En resumen: el trabajo del señor Godofredo García constituye un excelente libro de consulta, en el que los problemas se presentan con fácil interpretación y en tal sentido representa para los alumnos un manual evidentemente útil.

E. C. M.

ABRAMESCU.—*Lectiuni de Geometrie Analitica.* Editura Universitatii din Cluj., 2ª ed., 1937. Un vol. de 654 págs.

La reedición de este excelente texto del profesor rumano ha permitido perfeccionarlo en diversos puntos y agregar nueva materia de estudio presentada en forma de ejercicios, que aumenta en 36 págs. la extensión del volumen.

El método seguido es métrico y no proyectivo, usando coordenadas cartesianas oblícuas y con ellas aborda los acostumbrados problemas de Geometría lineal y cuadrática. Novedad digna de nota es el capítulo de 80 págs. sobre Geometría no euclidiana, en el cual da todos los elementos necesarios para abordar la bibliografía superior sobre el tema. También en forma de apéndice expone la Geometría analítica vectorial, y nos parece encomiable tal criterio, pues tan perjudicial para la formación de los alumnos es la omisión de este aspecto de la geometría analítica, como el uso exclusivo del método vectorial para cuestiones de rectas y cónicas en que no ofrece ventajas apreciables, a expensas del método cartesiano, que es instrumento indispensable para todas las disciplinas matemáticas. Otra cosa sucede en la Geometría diferencial, en la cual ofrece ventajas el método vectorial y también el sintético, como lo ha desarrollado el mismo autor en su original curso de Geometría infinitesimal, del cual hicimos oportunamente el análisis, señalando sus características.

Es de lamentar que en lengua castellana no existan adecuados textos de Geometría analítica para introducción en esta disciplina y para uso de los cultivadores de ciencias aplicadas, pues los excelentes de Cámara y Vegas son más convenientes para los aficionados a la Matemática pura por su método proyectivo. El desconocimienao de la lengua rumana, que no puede salvarse por analogías y semejanzas a pesar de su estirpe latina, dificultará la difusión entre nuestros estudiantes del texto que comentamos.

J. R. P.

FORADORI (E.).—*Grudlagen der Teiltheorie.*—Un vol. de 80 págs.— Hirzel, Leipzig, 1937. Pr. RM. 4,80.

El autor se propone edificar una teoría básica de la Matemática, que en cierto modo vendría a reemplazar a la de Cantor. En la teoría de los conjuntos la idea primaria es la de elemento y de ella deriva la de conjunto, es decir: «*agregado de*»; en cambio, la idea primaria en la nueva teoría es la de «*parte de*». Esta relación: $a \mu b$ que significa a es parte de b está definida implícitamente por los siguientes axiomas:

$$\text{I) } a \mu a \qquad \text{II) Si } a \mu b \text{ y } b \mu c \text{ es } a \mu c.$$

De estas dos simplicísimas propiedades idéntica y transitiva deduce multitud de consecuencias no triviales.

Parece prematuro conjeturar cuál sea el porvenir reservado a este intento de reedificación de la Matemática entera; pero en todo caso aun cuando resultaran vanas las esperanzas de destronar los métodos actuales parece asegurado un puesto a esta disciplina en el campo de la ciencia actual, al lado de las teorías abstractas muy generales, situadas a la entrada del edificio, que si no suministran materia de especulación, al menos organizan sistemáticamente las ideas ya existentes y forman molde para otras ideas futuras.

Permítase al relator apuntar que la idea capital no es nueva y los elementos lógicos del método se encuentran en los viejos textos logísticos aunque parece original la forma de su desarrollo. En unos apuntes mimeográficos de viejas lecciones anda expuesto un intento de teoría de los *conjuntos ordenados*, con el más amplio sentido dada a esta palabra, esto es, con la sola condición I y II. El conjunto de particiones de un todo sería un conjunto de tal naturaleza, y justamente era este el modesto objeto de tales apuntes para servir de prolegómenos a la teoría de la integración y a la teoría de límites de Moore-Smith; también un todo y sus partes forman un conjunto ordenado, puesto que satisfacen a los mismos axiomas I y II y la teoría de las partes de Foradori quedaría por tanto englobada en ella o más bien le sería equivalente; pero la trascendencia de tales propedéuticas no debe buscarse en sus principios, sino en sus aplicaciones finales y las obtenidas en la obra que comentamos, ni autorizan todavía a forjarse excesivas ilusiones, ni tampoco a negarle un posible éxito en el porvenir, después de nuevas aportaciones de diversos investigadores.

J. R. P.

SAUER (R).—*Projektive Liniengeometrie.*—Un vol. de 194 págs. Göschens Lehrbücherei. Walter de Gruyter & C°. Leipzig 1937. Pr. Enc. R.M. 9.

No pretende agotar el tema, sino despertar interés hacia él, mediante selección de las propiedades más sugestivas e interesantes de la Geometría reglada, que sin exigir complicado mecanismo analítico ofrecen más pleno contenido geométrico. Contiene el estudio proyectivo de los diversos sistemas de rectas, con sugestivas figuras que llenan ampliamente su misión.

He aquí el sumario del contenido de los dos primeros capítulos: coordenadas de la recta, representaciones proyectivas, complejos lineales y sus invariantes, haces de rectas y superficies desarrollables, haces hiperbólicos y parabólicos, haces autoproyectivos, haces de tercer orden, cuárticas autoproyectivas de cuarto orden.

El tercer capítulo trata de los *sistemas* de rectas, llamando así a los haces doblemente infinitos o congruencias rectas; estudia sus invariantes y clasificación, curvas y superficies focales, curvas principales, envolventes de las tangentes principales, congruencias parabólicas con sus curvas o superficies focales, etc., terminando con el estudio de las superficies de curvatura negativa, y en especial de las curvas de Darboux y de las curvas de Segre.

El capítulo IV está dedicado a las congruencias especiales y muy especialmente a las autoproyectivas, es decir, que se transforman en sí mismas por las trasformaciones de un grupo de colineaciones, distinguiendo sucesivamente el tipo hiperbólico y el parabólico. Después de considerar otros tipos especiales de congruencias, dedica especial atención a las congruencias que designa por la letra *W*, que son las de Weingarten, y termina con el estudio del caso en que aparecen los ciclos de Laplace.

La deformación infinitesimal de superficies es el objeto del capítulo siguiente, analizando sus relaciones con las congruencias de Weingarten, y diversos tipos especiales, sin olvidar el estudio de las tensiones producidas por la deformación de las membranas elásticas.

Por último trata de los complejos de rectas o sistemas triplemente infinitos; contactos, invariantes, complejos tetraedrales, en especial de segundo orden o segunda clase, etc.

Intima conexión hay entre esta obra y la ya analizada anteriormente de Salkowski sobre Geometría diferencial afine de curvas y superficies, cuya lectura previa es muy conveniente para sacar de ésta el máximo provecho. Digna de nota es la especial atención dedicada a las aplicaciones físicas, que sorprende por tratarse de problemas netamente métricos, los cuales conducen sin embargo al campo proyectivo en que se desarrolla la obra, sin necesidad de los especiales recursos introducidos por Study (complejos y vectores duales) para abordar tales cuestiones métricas.

El libro es, por tanto, igualmente recomendable para profesores y matemáticos; como también para los técnicos a quienes, para poder usar legítimamente ese título, debe interesar la teoría de la elasticidad en todos sus aspectos.

R. P.

SOBRINO ARANDA, LUIS.—*Estructuras hiperestáticas de Hormigón Armado.*—Un vol. de 270 págs., Córdoba, 1937.

Bajo este título el Prof. D. Luis Sobrino Aranda ha publicado recientemente un trabajo que constituye una valiosa contribución al estudio de los sistemas de múltiple indeterminación estática.

La principal dificultad para el cálculo de estas estructuras consiste en la variabilidad del momento de inercia a lo largo de las distintas piezas constitutivas, lo que no permite llegar a fórmulas de cálculo directo. Sin embargo el autor encara el mencionado problema y llega a fórmulas generales que permiten, mediante sucesivas aproximaciones, conocer su solución con considerable ahorro de tiempo y trabajo.

La primera parte de la obra la constituye un estudio de las propiedades del hormigón armado y de las deformaciones angulares en general. En segundo término figura su aplicación a las vigas hiperestáticamente sustentadas y en particular a la viga contínua con y sin cartelas.

Por último un estudio de pórticos de forma variable y en distintas condiciones de sustentación, completa el trabajo que constituye un esfuerzo muy encomiable del autor, cuyo ejemplo deberían seguir los estudiosos del país.

E. J.

PIAZZOLLA-BELOCH, M.—*Elementi di Fotogrammetria terrestre ed aerea.*— Un vol. de 86 págs. y IX tablas con 56 figuras. — Cedam, 1934, XII, Padua. Precio: Liras 20.

En este breve tratado, la profesora Piazzolla-Beloch se ocupa de los fundamentos geométricos de la Fotogrametría. Algunas nuevas construcciones, soluciones y simplificaciones dan al libro un particular interés, resultando útil no sólo a los estudiantes de *ingeniería, sino también* a quienes tengan las nociones fundamentales de la geometría descriptiva y proyectiva y se interesen por la Fotogrametría.

Se divide la obra en dos partes. En la primera se halla expuesto en un primer capítulo, como base de los fundamentos teóricos de la Fotogrametría y de todas las cuestiones de orientación recíproca de las perspectivas de un mismo objeto, el teorema de los puntos nodales (de Hauck) y la construcción fundamental, con la cual se deduce a partir de dos perspectivas dadas (fotografías), la proyección de una figura desde un determinado centro sobre un plano dado. Sigue la consideración de varios casos particulares. Una vez agotado el caso de las perspectivas orientadas, se pasa al estudio teórico de las perspectivas no orientadas. Un segundo capítulo, bajo el título de *criterios prácticos de Fotogrametría,* contiene la aplicación de los criterios generales a la Fotogrametría terrestre, en el cual se consideran varios casos particulares de restitución.

La segunda parte trata de la Fotogrametría aérea.

En un primer capítulo se halla expuesto el método de Finsterwalder de reconstrucción de un objeto del cual se tiene dos fotografías. Trata luego el problema de la restitución con procedimientos rigurosos y aproximados para teoremas planos y ondulados, en estos últimos con el uso de los reticulados de Mœbius. Un tercer capítulo trata de la determinación de ángulos horizontales y verticales. Siguen luego ciertos métodos para la determinación de la orientación externa en levantamientos topográficos de terrenos planos o de terrenos cualesquiera (problema del vértice de pirámide) y se exponen construcciones gráficas tanto para el caso general (dados tres puntos del terreno) como para el caso particular en el cual se tengan dos puntos del terreno y una dirección. La autora demuestra que, en este último caso, el problema se reduce al 2º grado y es resoluble con regla y compás. Hay algunas construcciones para restituir las imágenes de los puntos fotografiados, después de haber restablecido la orientación externa.

El libro tiene un breve apéndice en el cual se recuerdan algunas propiedades y construcciones de geometría proyectiva útiles para la comprensión del texto, entre las cuales hay algunas modificadas oportunamente a los fines de las aplicaciones prácticas.

Cierran el volumen breves datos históricos y una prolija bibliografía.

V.