LA DUPLICACION DEL CUBO CON ESCUADRA Y COMPAS

Por YANNY FRENKEL (Buenos Aires)

Es sabido que un problema de tercer grado no puede resolverse con regla y compás; pero Bieberbach ha probado (*) que la solución geométrica es posible si se usa además una escuadra en las siguientes condiciones: un cateto pasa por un punto dado, el vértice pertenece a una recta determinada y el otro cateto debe permanecer tangente a una circunferencia de centro y radio conocido.

La escuadra puede desplazarse sin dejar de cumplir las condiciones enunciadas.

En su artículo citado resuelve Bieberbach el problema de la trisección del ángulo utilizando los métodos vectoriales expuestos en sus *Leitfaden*, e indica después cómo el problema de la duplicación del cubo puede reducirse al de la trisección.

Como este método indirecto resulta excesivamente complicado, nos proponemos en esta nota dar una solución directa del problema, extremadamente sencilla, que es aplicable con pequeña modificación a cualquier raíz cúbica, y por tanto puede utilizarse para resolver todo problema de tercer grado, incluso el de trisección del ángulo, con ventaja sobre la de Bieberbach.

Tomemos dos posiciones distintas de la escuadra y llamemos x al segmento que ha descrito el vértice sobre la recta a que pertenece al cambiar de posición.

Si ahora determinamos x en función de las coordenadas del punto, de la recta y del radio de la circunferencia antes fijados, resultará para x una ecuación de tercer grado, y eligiendo convenientemente las coordenadas podemos transformarla en la forma $x^3 = 2P$ donde P será una cierta constante que procuraremos hacer lo más sencilla posible.

Tendremos así la arista del cubo de volumen $2P$ y los demás casos se pueden reducir a él por una simple proporcionalidad.

Nuestro problema se reducirá, pues, a determinar las coordenadas que hemos de dar al punto, a la recta y a la circunferencia:

$$a_0, b_0, a, b, r$$

En la figura O es el origen de coordenadas y P el punto fijado.

Vamos a determinar la distancia r de A a las rectas CD y $C'D'$; para esto determinaremos las ecuaciones de cada una de ellas.

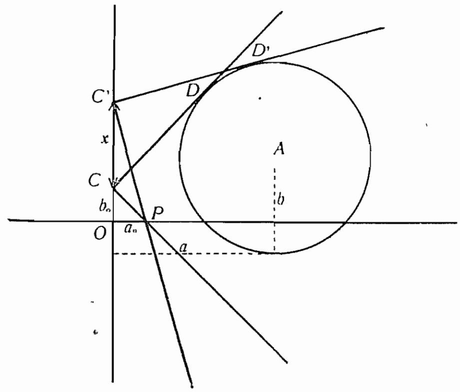
Ecuación de CD:

$$\frac{Y}{b_0} + \frac{X}{\dfrac{b_0^2}{a_0}} = 1$$

(*) *Zur Lehre der kubischen Konstruktionen.*—Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 167, 1931, pág. 142-146.

y aplicando la conocida fórmula que expresa la distancia de A a esta recta, resulta la ecuación

$$[1] \qquad b\, b_0 - a\, a_0 - b_0^2)^2 = r^2 (a_0^2 + b_0^2) .$$



Análogamente, la ecuación de la recta $C'\, D'$ es

$$\frac{Y}{b_0 + x} - \frac{X}{\dfrac{(b_0+x)^2}{a_0}} = 1$$

y siendo r la distancia entre A y $C'\, D'$, resulta:

$$[2] \qquad [b\,(b_0 + x) - a\, a_0 - (b_0 + x)^2]^2 = r^2 [a_0^2 + (b_0 + x)^2] ,$$

haciendo las operaciones indicadas y ordenando, resulta:

$$x^4 + (4\, b_0 - 2\, b)\, x^3 + (b^2 + 6\, b_0^2 + 2\, a\, a_0 - 6\, b\, b_0 - r^2)\, x^2 +$$
$$+ (4\, a\, a_0\, b_0 - 2\, a\, a_0\, b + 2\, b^2\, b_0 + 4\, b_0^3 - 6\, b\, b_0^2 - 2\, r^2\, b_0)\, x$$
$$+ (-a\, a_0\, b_0\, b - b_0^2)^2 = r^2 (a_0^2 + b_0^2)$$

y teniendo en cuenta la [1] se reduce a ésta:

$$x^3 + (4\, b_0 - 2\, b)\, x^2 + (b^2 + 6\, b_0^2 + 2\, a\, a_0 - 6\, b\, b_0 - r^2)\, x +$$
$$+ 2\, b^2\, b_0 + 4\, b_0^3 - 2\, a\, a_0\, b - 6\, b\, b_0^2 - 2\, r^2\, b_0 + 4\, a\, a_0\, b_0 = 0 .$$

Recordemos que nos proponíamos llevar la ecuación a la forma $x^3 = 2\,P$ y por tanto empezaremos por hacer desaparecer el término en x^2; esto lo podríamos haber hecho reemplazando $x = x' - k$, pero será mucho más breve hacer desaparecer directamente el coeficiente de x^2, fijando una relación entre b y b_0; por ejemplo $b = 2\, b_0$.

Nuestro problema tiene cinco indeterminadas y no hemos establecido más que dos ecuaciones; por tanto, para determinar el problema, habrá que dar otras tres condiciones; ya hemos fijado una y después daremos otras dos.

Copiando la ecuación anterior y haciendo $b = 2\,b_0$ queda

[3] $$x^3 - x\,(2\,b_0^2 - 2\,a\,a_0 + r^2) - 2\,r^2\,b_0 = 0.$$

ahora buscaremos condiciones para anular el coeficiente de x, es decir, para que sea:

$$2\,b_0^2 - 2\,a\,a_0 + r^2 = 0\,.$$

hagamos $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, queda entonces $b = 2$; y el trinomio da:

[2'] $$2 - 2\,a + r^2 = 0\,.$$

Ahora debemos determinar a y r; habiendo fijado arbitrariamente $(a_0,\ b_0,\ b)$ nuestras dos ecuaciones nos permitirán encontrar los valores de a y r.

Reemplazando en [1] los valores arbitrariamente fijados, ésta se convierte en

[1'] $$a^2 - 2\,a + 1 = 2\,r^2\,.$$

Resolviendo el sistema [1'] [2'] obtenemos:

$$a^2 - 6\,a + 5 = 0, \quad a = 1, \quad a = 5\,.$$

Tomamos $a = 5$, pues para $a = 1$ resulta radio nulo; mientras que para $a = 5$ es $r = \sqrt{8}$.

En [3] hemos anulado el coeficiente de x y queda

$$x^3 = 16;\ x = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2.8}\,.$$

Nos habíamos propuesto llevar la ecuación a la forma $x^3 = 2\,P$, y con los valores que hemos fijado resulta $P = 8$; procuraremos hallar valores de las indeterminadas que hagan $P = 1$ y se ve inmediatamente que basta tomar para ello las mitades de los valores antes fijados, es decir, ahora tomaremos $a_0 = {}^1/_2$, $b_0 = {}^1/_2$, $a = {}^5/_2$, $b = 1$, $r = \sqrt{2}$, con esto la [3] ha quedado reducida a

$$x = \sqrt[3]{2}\,.$$

Obtenemos, en resumen, la sencillísima construcción siguiente:

Se construye la circunferencia de centro $({}^5/_2,\ 1)$ *que pasa por el punto* $({}^3/_2,\ 0)$; *colocando la escuadra tangente, de modo que su otro brazo pase por el punto* $x = {}^1/_2$, *el vértice determina en el eje* y *el segmento* $\sqrt[3]{2}$.

(Instituto Matemático de la Universidad de Buenos Aires)