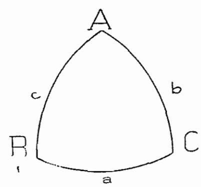
FORMULA DE LAS COTANGENTES

Reglas mnemotécnicas para su recordación

por J. A. del Peral

Sea el grupo de las seis fórmulas derivadas del teorema de Vieta llamado "de las cotangentes" o "de los cuatro elementos seguidos".

$$\begin{cases} \operatorname{cotg} a \operatorname{sen} c = \cos B \cos c + \operatorname{sen} B \operatorname{cotg} A \\ \operatorname{cotg} a \operatorname{sen} b = \cos C \cos b + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg} A \\ \operatorname{cotg} b \operatorname{sen} c = \cos A \cos c + \operatorname{sen} A \operatorname{cotg} B \\ \operatorname{cotg} b \operatorname{sen} a = \cos C \cos a + \operatorname{sen} C \operatorname{cotg} B \\ \operatorname{cotg} c \operatorname{sen} b = \cos A \cos b + \operatorname{sen} A \operatorname{cotg} C \\ \operatorname{cotg} c \operatorname{sen} a = \cos B \cos a + \operatorname{sen} B \operatorname{cotg} C \end{cases}$$



Pretender recordar una cualquiera de ella, sin más ayuda que la enunciación del teorema presenta dificultades que el lector ya conocerá. En algunos textos tales como: *Elementos de Trigonometría,* J. Cadrés, 1894; *Trigonometria sferica,* F. Porta, Torino, 1886; *Trigonometría,* M. Ortega y Sala, Madrid, 1902; *Trigonometria piana e sferica,* Giuseppe Pesci, 6ª ed. Livorno; *Trigonometría,* F. Böhnert. En estos textos digo, se proponen varias reglas mnemotécnicas para facilitar la recordación de la fórmula en cuestión. Al mismo efecto, proponemos al lector, quien decidirá sobre su conveniencia o inconveniencia, otra reglita que insertamos al final, después de haber expuesto las de los textos nombrados.

* * *

Tratado Elementare de Trigonometria.—G. Pesci.

Dice: Sea $\operatorname{cotg} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos \gamma + \operatorname{sen} \gamma \operatorname{cotg} \alpha$; para recordar estas fórmulas es menester que cada una de ellas, por ejemplo la que contiene los elementos a, b, α, γ puede escribirse de la manera siguiente: Se comienza con escribir las seis funciones: cotg sen cos cos sen cotg de las cuales las tres últimas en orden inverso al de las tres primeras. Después se observa que las primeras tres letras son latinas y las tres últimas griegas; que la 1ª y la última son del mismo orden; que la 2ª y la 3ª son iguales a la letra latina que falta todavía y que la 4ª y la 5ª son iguales a la letra que resta.

Observamos: Donde se enuncian las seis funciones que intervienen es menester completar diciendo qué relación algebraica las liga, es decir, escribir:

$$\operatorname{cotg}\ldots \operatorname{sen} = \cos\ldots \cos\ldots + \operatorname{sen}\ldots \operatorname{cotg}\ldots$$

* * *

Trigonometría.—ORTEGA y SALA.

Se iguala el producto de las cotg de dos elementos opuestos al producto de las cotg de los otros dos; se convierte el segundo miembro en cosenos y se separa luego en el primer miembro las líneas de las letras minúsculas de las de las mayúsculas por medio del signo —.

Sea por ej.: Relación entre b, c, A, C. —

$$\text{cotg } c \text{ cotg } C = \text{cotg } b \text{ cotg } A\,. \quad (1)$$

$$\text{cotg } c \text{ cotg } C.\ \text{sen } b \text{ sen } A = \cos b \cos A \quad (2)$$

$\text{cotg } c \text{ sen } b - \text{cotg } C \text{ sen } A = \cos b \cos A$ (3) que es la fórmula buscada.

Observamos: 1º La igualdad (1) no es cierto lo que su autor aclara expresamente.

2º El pasaje de la (2) a la (3) tampoco es cierto.

3º Es menester agregar a la regla que en la separación de las líneas de las letras minúsculas y mayúsculas esta separación debe efectuarse en el orden enunciado, pues de no hacerlo así se obtendría también $\text{cotg } C \text{ sen } A - \text{cotg } c \text{ sen } b = \cos b \cos A$ que no es la fórmula correspondiente ni pertenece al grupo.

* * *

Trigonometría sferica.—F. PORTA.

Dice al respecto: En cada triángulo esférico, considerados cuatro elementos consecutivos, el producto de los cosenos de los dos elementos medios, es igual al determinante formado con los senos de los elementos medios y con las cotangentes de los elementos extremos tomados en orden inverso a aquel de los primeros.

Así sean cuatro elementos consecutivos, tendremos:

$$\cos b \cos C = \begin{vmatrix} \text{sen } b. & \text{cotg } A. \\ \text{sen } C. & \text{cotg } a \end{vmatrix} \quad \text{o sea}$$

$$\cos b \cos C = \text{sen } b \text{ cotg } a - \text{sen } C \text{ cotg } A\,. \quad (1)$$

Observamos que: Si nada se establece con respecto al orden en que se toman los elementos podríamos concluir observando la regla en que

$$\cos C \cos b = \begin{vmatrix} \text{sen } C. & \text{cotg } a \\ \text{sen } c. & \text{cotg } A. \end{vmatrix}$$

o sea $\qquad \cos C \cos b = \text{sen } C \text{ cotg } A - \text{sen } c \text{ cotg } a$

fórmula que no es la (1) ni responde al teorema.

* * *

Elementos de Trigonometría.—J. CADRÉS.

Dice refiriéndose al grupo de las seis fórmulas:

Para recordar estas relaciones debe tenerse en cuenta: 1º Que cada término tiene por 1er. factor la colínea del último factor del término anterior.

2º Que el último factor del 2º término es el coseno del ángulo comprendido.

3º Que el último factor del 3er. término es la cotangente del ángulo opuesto.

Observamos que: esta fórmula nos serviría más bien para verificar que para formar la fórmula, verificación que no alcanzaría al 1er. factor del 1er. miembro acerca del cual nada dice la regla.

* * *

Ebene und sphärische Trigonometrie.—F. BOHNERT.

Dice así: Estas fórmulas pueden ser fácilmente recordadas. Si se designan empezando de un lado cualquiera del triángulo cuatro elementos consecutivos en un sentido arbitrario con las cifras I II III IV es siempre:

$$\cos \mathrm{II} \cos \mathrm{III} = \operatorname{cotg} \mathrm{I} \operatorname{sen} \mathrm{III} - \operatorname{sen} \mathrm{II} \operatorname{cotg} \mathrm{IV}.$$

Para mayor comodidad se lee la sucesión de los elementos en el esquema:

$$a\ \gamma\ b.\ \alpha\ c\ \beta\ a\ \gamma\ b.$$

* * *

La nueva reglita que proponemos y a la cual nos referimos al iniciar estas líneas, es la siguiente:

REGLA MNEMOTÉCNICA

cotg... sen = cos... cos... + sen... cotg (*Matriz*)   *Regla*: Se numeran cuatro elementos consecutivos a partir de un lado, y se llena la matriz sucesiva y ordenadamente con los elementos impares, intermedios y pares.

Observamos: En cuanto a la matriz bastará observar su estructura simétrica para recordarla con facilidad, pero si esto no bastase hágase este raciocinio lógico:

La fórmula se llama de las cotg *pero* $\operatorname{cotg} = \dfrac{\cos}{\operatorname{sen}}$ *de donde* cotg. sen = cos. (letras finales en orden alfabético) y así se habrá llegado a la mitad de la matriz. Repítase lo hallado en orden inverso y se tendrá:

$$\operatorname{cotg}\ \operatorname{sen} = \cos\ \cos = \operatorname{sen}\ \operatorname{cotg}.$$

Lo menos que el lector puede recordar es que se debe reemplazar por el signo + el segundo signo igual, y habremos llegado a la matriz propuesta arriba.

(Instituto Nacional del Profesorado Secundario).