NIKOLA OBRECHKOFF

Sur la sommation absolue par la transformation d'Euler des séries divergentes

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N° 5

BUENOS AIRES

1939

SUR LA SOMMATION ABSOLUE PAR LA TRANSFORMATION D'EULER DES SÉRIES DIVERGENTES

NIKOLA OBRECHKOFF (Sofía)

D'après K. Knopp [1] la série

$$[1] \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

est sommable par la transformation d'Euler d'ordre k, bref sommable E_k, si la série

$$[2] \quad \sum_{n=0}^{\infty} a'_n, \quad a'_n = \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} a_\nu, \quad q=2^k-1, k>0,$$

est convergente. La série [1] est absolument sommable d'ordre k, bref sommable $|E_k|$, si la série [2] est absolument convergente.

Dans cette note nous étudions la sommation absolue $|E_k|$ et completons ainsi les résultats de K. Knopp.

I. *Si la série* [1] *est absolument convergente, elle sera sommable* $|E_k|$ pour chaque $k > 0$.

En effet on a

$$|a'_n| \leqq \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} |a_\nu|,$$

$$\sum_{n=0}^{N} |a'_n| \leqq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \sum_{\nu=0}^{N} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} |a_\nu| =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{N} |a_\nu| \sum_{n=\nu}^{N} \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu}$$

Mais

$$\sum_{n=\nu}^{N} \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} < \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^{n+1}} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} =$$

$$= \frac{1}{(q+1)^{\nu+1}} \frac{1}{\left[1 - \frac{1}{(q+1)}\right]^{\nu+1}} = 1$$

(1) K. Knopp-Über das Eulersche Summierungsverfahren, Mathematische Zeitschrift, t. 15, 1922, p. 227-263; t. 18, 1923, p. 125-156,

Donc on aura

$$\sum_{n=0}^{N} | a'_n | < \sum_{n=0}^{N} | a_n |$$

et le théorème est démontré.

II. *Si la série* [1] *est sommable* $| E_k |$ *elle est aussi sommable* $| E_{k_1} |$ *pour chaque* $k_1 > k$.

Ce théorème découle immédiatement du théorème I parce que la transformée $E_{k+\delta}$ ($\delta > 0$) de la série [1] est égale á la transformée E_δ de la série transformée E_k de [1].

III. *Si la série*

[3] $$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

est sommable $|E_k|$, *la série*

[4] $$0 + a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

sera aussi sommable $| E_k |$ *et réciproquement.*

Désignons par $\Sigma\, a'_n$ la série transformée E_k de la série [3] et par $\Sigma\, a''_n$ la transformée de la série [4]. Alors on a ($q = 2^k - 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{z}{q + 1 - q\,z} \right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n\, z^{n+1} ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} \left(\frac{z}{q + 1 - q\,z} \right)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a''_n\, z^{n+1} ,$$

d'où l'on obtient facilement

[5] $$\frac{1}{q + 1 - q\,z} \sum a'_n\, z^{n+1} = \sum a''_n\, z^n .$$

De cette rélation il suit la formule

[6] $$a''_n = \frac{1}{q+1} \sum_{\nu=0}^{n-1} a'_\nu \left(\frac{q}{q+1} \right)^{n-1-\nu}$$

De [6] nous aurons

$$\sum_{n=0}^{N} | a''_n | \leqq \frac{1}{q+1} \sum_{\nu=0}^{N} \sum_{n=0}^{n-1} |a'_\nu| \left(\frac{q}{q+1} \right)^{n-1-\nu} =$$

$$= \frac{1}{q+1} \sum_{\nu=0}^{N-1} |a'_\nu| \sum_{n=\nu+1}^{N} \left(\frac{q}{q+1}\right)^{n-1-\nu} <$$

$$< \frac{1}{q+1} \sum_{\nu=0}^{N-1} |a'_\nu| \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{q}{q+1}\right)^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{N-1} |a'_\nu|$$

et la première partie du théorème est démontrée. De [5] on obtient

$$a'_n = (q+1)\, a''_{n+1} - q\, a''_n ,$$

d'où découle immédiatement la partie inverse.

IV. *Supposons que les séries* $\sum_0^\infty a_n$, $\sum_0^\infty b_n$, *soient sommables* $|E_k|$. *Alors la série produit de Cauchy* $\sum_0^\infty c_n$,

$$c_n = a_0\, b_n + a_1\, b_{n-1} + \ldots + a_n\, b_0 ,$$

est aussi sommable $|E_k|$.

En désignant par $\Sigma\, a'_n$, $\Sigma\, b'_n$, $\Sigma\, c'_n$ les séries transformées correspondantes on a [2] la formule

$$c'_n = (q+1)(a'_0 b'_n + \ldots + a'_n b'_0) - q\,(a'_0 b'_{n-1} + \ldots + a'_{n-1} b'_0) ,$$

d'où il suit tout de suite que la série $\Sigma\, |c'_n|$ est convergente puisque les séries $\Sigma\, |a'_n|$, $\Sigma\, |b'_n|$ sont convergentes.

V. *Si la série* [1] *est sommable* $|E_k|$ *elle est aussi sommable* $|B|$.

On sait [3] qu'une série $\sum_0^\infty a_n$ est absolument sommable par la méthode de M. Borel, bref sommable $|B|$, si les intégrales

$$[7] \qquad \int_0^\infty e^{-x}\, |u^{(\lambda)}(x)|\, d\,x , \qquad u\,(x) = \sum_0^\infty \frac{a_n\, x^n}{n!}$$

sont convergentes quel que soit l'indice de dérivation λ. Posons

$$S_n^{(k)} = \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} q^{n-\nu} s_\nu, \qquad s_\nu = a_0 + a_1 + \ldots + a_\nu ,$$

(2) Voir K. Knopp, II, p. 131.

(3) Emile Borel.—Leçons sur les séries divergentes, II—ème édition, Paris, 1928, p. 128.

on a

$$e^{-(q+1)x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n{}^{(k)}}{n!} [(q+1)x]^n = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n\, x^n}{n!} = h(x)\,,$$

d'où l'on obtient par la transformation $(q+1)\,x = y$, la formule

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n{}^{(k)}}{n!} x^n = e^{-\frac{x}{q+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n}{n!} \frac{x^n}{(q+1)^n} = g(x)\,.$$

En dérivant on obtient

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}{}_{n+1}}{n!} x^n = g'(x), \quad a_n{}^{(k)} = S_n{}^{(k)} - S^{(k)}{}_{n-1}\,,$$

$$|\, g'(x) \,| \leqq e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\, a^{(k)}{}_{n+1} \,|}{n!} x^n\,.$$

Donc nous aurons

$$\int_0^A |g'(x)|\,dx \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a^{(k)}{}_{n+1}|}{n!} \int_0^A e^{-x} x^n dx < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a^{(k)}{}_{n+1}|}{n!} \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx =$$

$$= \sum^{\infty} |a^{(k)}{}_{n+1}|\,,$$

et parce que

$$\int_0^{\infty} |\, g'\,(x) \,|\, d\,x = \frac{1}{q+1} \int_0^{\infty} |\, h'\,(x) \,|\, d\,x$$

on conclut que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left| \sum^{\infty} \frac{a_{n+1}\, x^n}{n!} \right| d\,x$$

est convergente. Mais d'après le théorème III on peut augmenter ou diminuer le rang des termes de la série [1] par un nombre arbitraire. Donc du précedent il suit que les intégrales [7] sont convergentes et le théorème est démontré.