RICARDO SAN JUAN

Derivación e Integración de Series Asintóticas

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Nº 6

BUENOS AIRES

1939

DERIVACION E INTEGRACION DE SERIES ASINTOTICAS

por R. SAN JUAN (Madrid)

I.—Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_1 (z - z_0)^n$ el desarrollo asintótico de una función $f(z)$ en un recinto R, siendo z_0 un punto del contorno. Escribiremos esto así:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Como es sabido, la definición de desarrollo asintótico resulta equivalente a que los productos $| z - z_0 |^{-m} \, | f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n (z - z_0)^n |$, se conserven acotados para cada m en un entorno de z_0 y dentro de R, es decir, que sea

$$\left| \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^m} \right| < M_m$$

en la interferencia de R con un entorno de z_0.

En particular, para $m = 1$, se tiene:

$$| f(z) - a_0 | < M_1 \, | z - z_0 |$$

de donde, para $z \to z_0$ sobre R, resulta:

$$\lim f(z) = f(z_0) = a_0 ,$$

si $f(z)$ es continua en z_0 sobre R. Análogamente, de

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - a_1 \right| < M_2 \, | z - z_0 |$$

resulta $f'(z_0) = a_1$ si definimos esta derivada en z_0 para $z \to z_0$ sobre R.

Pero la derivada segunda ya no resulta, por paso al límite, de la función, sino de la derivada primera, de suerte que para obtener la expresión general de los coeficientes mediante las derivadas en z_0 habrá que estudiar si $f'(z)$ y, por tanto, las derivadas sucesivas $f^n(z)$ tienen como desarrollos asintóticos los obtenidos derivando término a término.

Supongamos, para esto, que $f(z)$ es holomorfa en R y expresemos su valor en un punto z de R mediante la integral de Cauchy sobre una circunferencia $c(z)$ de centro z y radio $R(z)$ igual a la semidistancia de z_0 al contorno C de R; expresando análogamente el polinomio $\sum_{n=0}^{m-1} n \, a_n (z - z_0)^{n-1}$, se tiene:

$$\left| \frac{f'(z) - \sum\limits_{n=0}^{m-1} n a_n (z-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^{m-1}} \right| = \frac{1}{2\pi \, |z-z_0|^{m-1}} \left| \int\limits_{c(z)} \frac{f(t) - \sum\limits_{n=0}^{m-1} a_n (z-z_0)^n}{(t-z)^2} \, dt \right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi \, |z-z_0|^{m-1}} \int\limits_{c(z)} \frac{M_m |t-z_0|^m}{|t-z|^2} \, |dt| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi \, |z-z_0|^{m-1}} \; \frac{M_m \left(|z-z_0| + \frac{d(z)}{2} \right)^m}{\left(\frac{d(z)}{2} \right)^2} \; 2\pi \frac{d(z)}{2} =$$

$$= 2 M_m \left(1 + \frac{d(z)}{2\,|z-z_0|} \right)^m \frac{|z-z_0|}{d(z)} < 2^{m+1} M_m \frac{|z-z_0|}{d(z)}$$

pues $d(z) \leqq |z - z_0|$; y si además hay un subconjunto R' de R en el que se conserva acotado este cociente:

$$\frac{|z - z_0|}{d(z)} < k \qquad \text{o brevemente:} \quad |z - z_0| = O\,[d(z)] \qquad [1]$$

la cota anterior es $< k\, 2^{m+1} M_m$, y en este subconjunto R' vale, por tanto, el desarrollo:

$$f'(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_{n-1} (z - z_0)^{n-1} .$$

El subconjunto R' existe seguramente si el contorno C de R es una curva en el entorno de z_0, y éste un punto ordinario de ella; o un punto anguloso con tangentes distintas; e incluso un punto de retroceso con tangente única si en él es *cóncavo* el recinto, esto es, si la prolongación del rayo tangente por z_0 tiene un segmento $z_0 A$ dentro de R (*). En estos casos sencillos R contiene un ángulo, o más exactamente, un sector circular, de vértice z_0, y los puntos de éste cumplen la condición [1]. Recordemos, en efecto, que por la definición de rayo tangente, dado un contorno angular de la tangente única, o sendos entornos de las semitan-

---

(*) Si este segmento no pertenece a R, el recinto se dice *convexo* en z_0. Nótese que el segmento de la semi-tangente $z_0 B$ opuesto al $z_0 A$ no sirve para caracterizar la concavidad ni la convexidad, pues puede pertenecer indistintamente a R o al complementario, quedando en distinto o en el mismo conjunto que el $z_0 A$ según que la tangente atraviese o no la curva. Como también puede caracterizarse la concavidad y la convexidad incluso para puntos no cuspidales, es utilizando todo el contorno mediante el teorema I d'), según que el incremento del argumento sea menor o mayor que π; y no es difícil comprobar que estas condiciones coinciden con las anteriores cuando el incremento es cero ó $2A$.

gentes, hay un entorno circular del punto z_0 tal que los puntos de C interiores a este dan cuerdas contenidas en aquellos; y quedan, por lo tanto, uno o dos sectores circulares en el contorno de z_0 que, conteniendo puntos de C (*), pertenecen en bloque a R o al complementario. Excluido el caso trivial del punto cuspidal o de retroceso, en que el sector pertenece necesariamente a R por la condición de concavidad impuesta, un sector es interior a R y el otro es exterior. Para demostrarlo, elijamos entre las intersecciones de la curva con el contorno de dicho entorno, las P y A *contiguas* a z_0 por uno y otro lado sobre la curva, y el arco PA que determinan divide al entorno en dos partes conexas, que necesariamente pertenecen una a R y otra al complementario; pero existiendo puntos de ambas partes en los dos entornos de las semitangentes, las curvas de conexión que dentro del entorno circular unen entre sí estos puntos de R (y del complementario) tienen que pasar necesariamente por un sector y la otra por el opuesto.

Para ver finalmente que los puntos del sector interior satisfacen, en efecto, la condición [1], basta observar que si ampliamos éste por ambos lados en una amplitud c bastante pequeña para que todavía no alcance a las semitangentes, y elegimos un entorno de z_0 que no contenga puntos de la curva dentro del ángulo ampliado, en el sector común a este entorno y al ángulo primitivo se verifica:

$$\left| \frac{z - z_0}{d(z)} \right| < \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon}.$$

En estos casos sencillos $f(z)$ admite *derivadas angulares* en z_0 que valen:

$$f^n(z_0) = a_n . n! ;$$

y en el caso general estas igualdades subsisten si definimos las derivadas para $z \to z_0$ sobre R, como anteriormente.

Resumiendo las conclusiones obtenidas, podemos enunciar:

a) *Dado el desarrollo asintótico de una función*

$$f(z) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

(*) Claro es que la definición de tangentes se refiere exclusivamente a los puntos de C donde C es curva; pero por hipótesis C es curva en un entorno de z_0 y esto significa que hay un entorno plano de z_0 donde todos los puntos de C forman curvas. Si no se refiere esto al entorno plano, sino al lineal sobre la curva misma, subsiste lo anterior, eligiendo el entorno plano menor que la distancia de z_0 al resto de C.

en un recinto R *y para un punto* z_0 *del contorno, si* f (z) *es holomorfa en* R, *sus derivadas sucesivas admiten los desarrollos obtenidos derivando término a término:*

$$f^{m}(z) \sim \sum_{n=m}^{\infty} n^{(m} (z - z_0)^{n-m}$$

en todo subconjunto R' *de* R *caracterizado por la condición*

$$|z - z_0| = O[d(z)] \qquad [1]$$

donde d (z) *designa la distancia de* z *al contorno* C *de* R.

b) *Y si definimos las derivadas para* $z \to z_0$ *sobre* R', *se verifica*

$$f^{m}(z_0) = a_m . m! \quad m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

incluso para m = 0 *si* f (z) *es continua en* z_0 *sobre* R.

Esto permite escribir el desarrollo asintótico como serie de Taylor así:

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

y la función queda determinada por este desarrollo cuando es la *aproximación asintótica óptima* y se cumple la condición de Carleman (*).

Hemos visto además que

c) *Las cotas del desarrollo asintótico de la derivada* f' (z) *en* R' *son las mismas salvo un factor exponencial que las* M_n *de la función* f (z) *en* R, *y por tanto, si esta satisface en* R *la condición de Watson-Nevanlinna, las de Denjoy, o la de Carleman generalizada por Ostrowski, esto es, si es*

$$M_n < k^n . n! \; ; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = \infty \; ; \quad \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{M_n^2} \frac{dx}{x^2} = \infty$$

respectivamente (**), *la misma condición verifican las derivadas en* R'.

(*) R. San Juan.—Sumación de series divergentes y aproximación asintótica óptima (en prensa. Memoria premiada por la Academia de Ciencias de Madrid en el concurso de tema prefijado de 1935).

R. San Juan.—Sur le problème de M. Watson de la Théorie des séries asymtotiques et solution à un problème de M. Carleman de la Théorie des fonctions quasianalytiques. (Congrés International de Mathématiciens. Oslo, 1936).

(**) N. Watson.—A theory of asymptotic series (Trans. of the Royal Society of London. Serie A, vol. 221, p. 279-313).

F. Nevanlinna.— Zur Theorie des asymptotischen Potenzreihen. (Akademische Abhandlung. Helsingfors, 1916).

T. Carlemann.—Les fonctions quasianalytiques. (Gauthier-Villars, París, 1926, pág. 21 y 7).

A. Ostrowski.—Über quasianalytische Funktionen und Bestimmheit asymptotischer Entwicklungen. (Acta Mathematica B. 53 S 181-266).

d) *Este subconjunto* R' *existe seguramente y es un sector circular de vértice* z_0, *si el contorno* C *es una curva de Jordan en el entorno de* z_0, *y éste un punto ordinario de ella; o un punto anguloso con tangentes distintas e incluso un punto de retroceso con tangente única, si en este es cóncavo el recinto, esto es, si la prolongación de la semitangente por* z_0 *tiene un segmento* z_0 A *dentro del mismo.*

d') *Cuando todo el contorno* C *es una curva cerrada de Jordan y en* z_0 *tienen rayos tangentes los dos arcos contiguos, la condición necesaria y suficiente para que el recinto interior* R *contenga un sector circular de vértice* z_0 *(donde se cumple la condición* [1]*) es que el argumento del vector* z_0 z, *que proyecta desde* z_0 *un punto variable* z *de la curva* C, *experimente un incremento distinto de cero, cuando* z *recorre la curva a partir de* z_0.

Hemos visto que elegidos sendos entornos angulares, no rampantes de cada rayo tangente, o un solo entorno si estos coinciden, existe un entorno plano de z_0 que, no conteniendo puntos de C fuera de estos ángulos, tiene un par de sectores o uno solo que pertenecen en bloque a R o al complementario; y basta, por tanto, considerar uno solo P de sus puntos para decidir la situación de todo el sector. Pero es sabido que si P es interior a R, el vector $P z$ experimenta en su argumento un incremento de 2π al recorrer z la curva, y este argumento no resulta incrementado si P es exterior. Ahora bien, cuando el argumento de $z_0 z$ experimenta un incremento $\alpha > 0$, los argumentos de $z_0 z_1$ y $z_0 z_2$ difieren entre sí en más de $\alpha - \varepsilon$, si elegimos z_1 y z_2 sobre las curvas suficientemente próximas a z_0; y análogamente, los argumento de $P z_1$ y $P z_2$, difieren también en menos de ε de los valores inicial y final del argumento de $P z$ si tomamos z_1 y z_2 bastante cercanas a z_0. Pero fijadas así z_1 y z_2 con ambas condiciones, los argumentos de $z_0 z_1$ y $P z_1$ así como los de $z_0 z_2$ y $P z_2$, cuyas diferencias vienen representadas por los ángulos en z_1 y z_2, de los triángulos $P z_0 z_1$ y $P z_0 z_2$ respectivamente, también diferirán en menos de ε si tomamos P dentro de los entornos angulares de las semirectas $z_0 z_1$ y $z_0 z_2$ con semiamplitud ε; y comparando los tres resultados vemos que los argumentos inicial y final de $P z$ se diferencian entre si en más de $2\alpha - 3\varepsilon > 0$; luego P no puede ser exterior y no perteneciendo a la curva, es interior. En cambio, si el argumento de $z_0 z$ experimenta incremento nulo, resulta con idéntico razonamiento que el de $P z$ experimenta incremento $< 2\varepsilon$, luego también es nulo, y es, por tanto, P punto exterior.

II.—Para estudiar la integración del desarrollo asintótico $\Sigma\, a_n\,(z - z_0)^n$ entre z_0 y un punto z del recinto, construyamos primero el camino, eligiendo en R una sucesión de puntos $z_n \rightarrow z_0$, y uniendo cada dos consecutivos por su quebrada de conexión dentro de R, obtenemos una sucesión de quebradas que pueden no constituir curva (*), esto es, conjunto de puntos homeomorfo con un segmento cerrado, pero que aun entonces permiten definir la integral de $f\,(z)$ entre z_0 y z_1 por paso al límite de la integral entre z y z_i para $z_i \rightarrow z_0$.

Determinada así la integral, $\displaystyle\int_{z_0}^{z} f\,(z)\,d\,z$ veamos cuando admite como desarrollo asintótico el obtenido integrando término a término, es decir, cuando es:

$$\int_{z_0}^{z} f\,(z)\,d\,z \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,(z - z_0)^{n+1}$$

En efecto:

$$\left| \frac{\displaystyle\int_{z_0}^{z} f(z)dz - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{n+1}\,(z - z_0)^{n+1}}{(z - z_0)^{m+1}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_{z_0}^{z} \left| f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n (z - z_0)^{n+1} \right| |dz|}{|\,z - z_0\,|^{m+1}} \leq M_m \frac{\displaystyle\int_{z_0}^{z} |z - z_0|^m\,|dz|}{|\,z - z_0\,|^{m+1}}$$

y basta que para cada m este cociente se conserve acotado en el entorno de z_0. Prescindiendo además de las restricciones inútiles sobre la función $f\,(z)$ y sobre el campo R, que conservábamos de los teoremas precedentes, resulta:

(*) Esto acontece solamente cuando z_0 es accesible, esto es, puede unirse con los puntos de R mediante arcos de Jordan contenidos en el recinto. Pero esta restricción, innecesaria como hemos visto, es además insuficiente, pues habría que suponer tales curvas rectificables o al menos que permitan definir la integral.

Un ejemplo de punto accesible solo mediante arcos no rectificables, incluso siendo el contorno C una curva de Jordan, puede obtenerse como sigue: Elegido un ángulo arbitrario AOB, por ejemplo de 10^o, tracemos sus arcos centrales $A_1\,B_1$, $A_2\,B_2$, $A_3\,B_3$,... de radios $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ y unámoslos entre sí con los segmentos intermedios tomados alternativamente de uno y otro lado, para formar así un trazo continuo $A_1\,B_1\,B_2\,A_2\,A_3\,B_3$..., que es una curva de Jordan, pues cada trozo arco-segmento $A_1\,B_1\,B_2$, $B_2\,A_2\,A_3$, ... se representa sobre el segmento del otro lado $A_1\,A_2$, $B_2\,B_3$,... proyectándole. De esta curva se deduce también otra con longitud también infinita, sustituyendo cada par de arcos $A_1\,B_1$ y $A_2\,B_2$;

a) *Dado el desarrollo asintótico de una función cualquiera*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

en un conjunto R *(no necesariamente recinto), si éste contiene caminos de integración que permiten definir la integral de* f (z) *desde* z_0 *a los puntos de* z *de* R *(como acontece cuando* R *es un recinto y* z_0 *un punto de contorno), esta integral admite como desarrollo asintótico el obtenido integrando término a término:*

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1} \qquad (^{**})$$

en todo subconjunto R_1 *de* R *donde se conservan acotados para cada* n *los cocientes*

$$\frac{1}{|z-z_0|^n} \int_{z_0}^{z} |z-z_0|^{n-1} |dz| < k_n .$$

b) *Esto acontece seguramente en un sector circular de vértice* z, *pues siendo rectilíneo el camino, es decir:*

$$z-z_0 = x+iy \qquad y = \alpha x$$

se tiene:

$$\frac{1}{|z-z_0|^n} \int_{z_0}^{z} |z-z_0|^{n-1} |dz| = \frac{1}{(\sqrt{1+\alpha^2}x)^n} \int_0^x (\sqrt{1+\alpha^2}x)^{n-1}\, 2\sqrt{1+\alpha^2}dx =$$

$$= \frac{2}{n} \;;$$

$A_3 B_3$ y $A_4 B_4, \ldots$ unidos por segmentos $B_1 B_2$, $B_3 B_4, \ldots$ de un mismo lado, por otros intermedios $A'_1 B'_1$ y $A'_2 B'_2$, $A'_3 B'_3$ y $A'_4 B'_4, \ldots$ de modo que se conserve la suma de longitudes, lo cual puede lograrse, por ejemplo, con radios $1 - \varepsilon_1$ y $\frac{1}{2} + \varepsilon_1, \frac{1}{3} - \varepsilon_3$ y $\frac{1}{4} + \varepsilon_3, \ldots$ siendo $\varepsilon_{2k+1} \leq \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) : 4$.

La curva $A'_1 B'_1 B'_2 A'_2 A'_3 B'_3 \ldots$ análogamente formada con estos arcos se separa de la anterior sin cortarla mediante un giro alrededor de O de 1º, por ejemplo en sentido de $O B_1$ a $O A_1$, y queda así entre ambas un recinto en que O es punto de contorno accesible mediante cualquier posición intermedia de la curva girada, pero inaccesible por curvas de longitud finita, pues cualquer curva intermedia tiene arcos de longitud mayor que las cuerdas $A'_1 B'_1$, $A_2 B_2$, $A'_3 B'_3$, $A_4 B_4, \ldots$ Podría partirse de la curva $y = x \; sen \; \frac{\pi}{x}$ pero resulta menos clara la comprobación de que toda curva intermedia tiene longitud finita.

(**) El desarrollo de otra primitiva se obtendrá sumando a éste la constante de integración.

y si la paralela al eje y por z_0 *pertenece al sector, basta tomar* $x = \beta$ *y a ambos lados de ésta* $(-\varepsilon \leqq \beta \leqq \varepsilon)$.

Combinando esta conclusión con la obtenida para la derivada I, c), podemos demostrar el siguiente teorema de trascendental importancia en la teoría de la aproximación asintótica óptima.

c) *Si una función holomorfa* $f(z)$ *es aproximación asintótica óptima de una serie* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ *en un sector circular de vértice* z_0, *esto es, si las cotas* L_n *de su desarrollo asintótico en éste son ordenadamente menores que las homólogas* M_n *de cualquier otra, salvo un factor exponencial* K^n: (*)

$$L_n < K^n M_n$$

su derivada $f'(z)$ *y su primitiva son, respectivamente, la aproximación asintótica óptima en el mismo sector de la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1}$ *o de la* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$ *obtenidas derivando o integrando término a término.*

Pues según I a) la serie $\sum n\, a_n (z - z_0)^{n-1}$ tiene como aproximación asintótica $f'(z)$, cotas $K^n . L_n$; y si tuviese otra aproximación asintótica $f_1(z)$ con cotas N_n algunas menores que las correspondientes $K^n . L_n$, salvo un factor exponencial $K_1{}^n$, es decir, $N_n < K^n{}_1 . K^n . L_n$ para algunos valores de n, la primitiva de esta $f_1(z)$ admitiría como desarrollo asintótico el dado con cotas $K_2{}^n N_n < K_2{}^n . K_1{}^n . K^n . L_n$ para algunas n, contra la condición de aproximación óptima de las L_n.

III.—Estas conclusiones pueden aplicarse al punto del infinito mediante la sustitución $z' = \frac{1}{z}$, pero es preferible establecerlas directamente. Así, pues, para la derivación, tendremos:

(*) En nuestros dos trabajos citados definimos la aproximación asintótica óptima con la condición restringida $L_n < M_n$, pero todas sus propiedades subsisten con la introducción del factor exponencial. Como es sabido, en las aplicaciones de las condiciones de Watson, Denjoy y Carleman, dos sucesiones L_n y M_n son equivalentes cuando su cociente $\frac{L_n}{M_n}$ tiene crecimiento exponencial; y así resulta que ambas definiciones son las mismas cuando se cumplen estas condiciones.

$$|z|^{m+1}\left|f'(z)-\sum_{n=1}^{m-1}-n\frac{a_n}{z^{n+1}}\right|=\frac{|z|^{m+1}}{2\pi}\left|\int_{c(z)}\frac{f(t)-\sum\limits_{n=0}^{m-1}\frac{a_n}{t^n}}{(t-z)^2}dt\right|<$$

$$<\frac{|z|^{m+1}}{2\pi}\int_{c(z)}\frac{M_m}{|t|^m}\frac{|dt|}{R(z)^2}<\frac{|z|^{m+1}}{2\pi}\frac{M_m}{||z|-R(z)|^m}\frac{2\pi R(z)}{R(z)^2}<$$

$$<M_n\frac{1}{\left|1-\frac{R(z)}{|z|}\right|^m}\frac{|z|}{R(z)}$$

y habremos de tomar el radio $R(z)$ de modo que se conserve acotado superiormente $\frac{|z|}{R(z)}$ e inferiormente $1-\frac{R(z)}{|z|}$; pero al mismo tiempo ha de ser $R(z)<d(z)$; luego elegiremos como radio $R(z)$ el menor de los dos números $\frac{|z|}{2}$ o $\frac{d(z)}{2}$ y entonces la cota anterior es, respectivamente, menor que

$$M_m.2^m.2 \text{ o bien } < M_m.2^m.2.\frac{|z|}{d(z)}$$

y si en un subconjunto R' de R se conserva acotado

$$\frac{|z|}{d(z)}<K \quad \text{o brevemente} \quad |z|=O[d(z)] \qquad [2]$$

esta segunda cota es $< M_m.2^{m+1}.K$, valor que supera también a la primera si tomamos $K>1$. Es decir:

a) *Si una función* f (z) *holomorfa en un recinto* R *admite en este el desarrollo asintótico*

$$f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n},$$

sus derivadas sucesivas $f^m(z)$ *admiten los desarrollos obtenidos derivando término a término:*

$$f^m(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m(n+m-1)^{(m}\frac{a_n}{z^{n+m}}$$

en todo subconjunto R' *de* R *definido por la condición*

$$|z|=O[d(z)].$$

b) *Las cotas de estos desarrollos asintóticos de las derivadas en* R' *son las mismas salvo un factor exponencial que las de la función en* R *y, por tanto, si esta satisface en* R *la condición de Watson-Nevanlinna, la de Denjoy o la de Carleman-Ostrowski, lo mismo acontece a aquella en* R'.

Sobre la existencia del conjunto *R'* vamos a establecer conclusiones análogas a los teoremas *d* y *d'*. Considerando la proyección sobre la esfera, con el mismo razonamiento del plano se demuestran estos teoremas *d* y *d'* sobre la existencia en *R* de un sector limitado por dos meridianos y un paralelo; pero la comprobación de la condición métrica [2] exige naturalmente volver al plano; y, en efecto, la proyección de dicho sector es la prolongación de un sector circular de vértice *0*, cuyos puntos cumplen la condición $\frac{|z|}{d(z)} < \frac{1}{\operatorname{sen} \varepsilon}$ en un entorno del ∞, determinado a condición que no contenga puntos del contorno *C* en el ángulo obtenido ampliando el anterior en ε por ambos lados sin alcanzar las proyecciones de las tangentes en el polo P. La proyección de un arco de Jordan terminado en *P* es, como se sabe, una curva infinita en el plano, esto es, un conjunto no acotado homeomorfo con una semirecta y sin puntos propios de acumulación fuera del mismo; y recíprocamente. La existencia de tangente en *P* a dicho arco se traduce sobre el plano en que la semirecta que proyecta desde el origen los puntos z de la curva infinita tiende a una posición límite, cuando $z \to \infty$ sobre la curva, esto es, que dado un entorno angular de dicha semirecta límite, todos los semirayos proyectantes quedan en este ángulo cuando los puntos de la curva están en cierto entorno del ∞. Interpretadas así sobre el plano las hipótesis y conclusiones de la esfera, podemos enunciar:

c) *El conjunto* R' *existe seguramente y es la prolongación de un sector circular de vértice* O *cuando en el entorno del* ∞ *el contorno* C *se compone de dos curvas infinitas (conjuntos no acotados cerrados en el plano euclideo y homeomorfos con una semirecta) y las semirectas* o z *que proyectan desde el origen los puntos de estos arcos tienden, para* $z \to \infty$ *sobre cada curva, a posiciones límites distintas, o que si coinciden, lo hacen en una semirecta cuya opuesta tiene un segmento* O A *dentro del recinto.*

d) *Cuando el contorno es una curva cerrada en el* ∞ *del plano complejo (esto es, se compone de dos curvas infinitas con extremo propio común* (*)*) y las semirectas que proyectan sus*

(*) Nótese la diferencia esencial entre este concepto de curva infinita cerrada en el plano complejo con punto del infinito único y el de curva cerrada en el plano proyectivo donde hay infinitos puntos impropios. En el plano complejo se unen en el infinito todas las curvas infinitas, mientras que en el proyectivo solo las que tienen paralelas sus direcciones asintóticas, existiendo algunas que carecen de éstas y no se consideran cerradas.

puntos desde O tienen posiciones límites para z→∞ sobre cada arco, la condición necesaria y suficiente para que el recinto contenga la prolongación de un sector circular de vértice O, que será un conjunto R', es que el argumento de la semirecta o z *que proyecta un punto de la curva, experimente un incremento distinto de cero al pasar de una posición límite a la otra cuando* z *recorre la. curva.*

IV.—La integración se efectúa lo mismo que para el punto propio sobre la sucesión de quebradas que unen en R cada dos puntos consecutivos de los $z_1 \to \infty$ (*), pero el paso al límite que allí aparecía como complemento de generalidad, constituye aquí la definición misma de la integral, y vamos a estudiar cuando es válido el desarrollo

$$F(z) = -\int_z^\infty \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] dz \sim \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{2z^2} + \frac{a_4}{3z^3} + \cdots,$$

incluyendo los dos términos a_0 y $\dfrac{a_1}{z}$ en el primer miembro, como es costumbre por no tener integral finita.

Siendo:

$$|z|^m \left| F(z) - \sum_{n=1}^{m-1} n \frac{a_{n+1}}{z^n} \right| = |z|^m \left| -\int_z^\infty \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] dz + \int_z^\infty \sum_{n=1}^{m-1} \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} dz \right| =$$

$$= |z|^m \left| \int_z^\infty \left[f(z) - \sum_{n=0}^{m} \frac{a_n}{z^n} \right] dz \right| < M_m |z|^m \int_z^\infty \frac{|dz|}{|z|^{m+1}}$$

resulta:

(*) Esta sucesión de quebradas forman evidentemente un conjunto homeomorfo con una semirecta y no acotado, pero puede no ser cerrado, en el plano euclidiano, es decir, no contener todos sus puntos de acumulación propios (el ∞ no pertenece a dicho plano), y, por consiguiente, puede no ser curva en el sentido topológico de conjunto compacto, conexo y cerrado de una dimensión. Recintos en que ninguna de las sucesiones de tales quebradas sea curva o brevemente; en que el ∞ sea punto inaccesible del contorno, se obtienen sin más que aplicar la transformación $z' = \dfrac{1}{z}$ a cualquier recinto en que el origen sea punto inaccesible del contorno. Mediante segmentos rectilíneos puede limitarse un recinto de este tipo con el semieje $+\infty$, el segmento $(0, 1)$, del eje, y una sucesión de segmentos horizontales de alturas $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots$ y ex-

a) *Dado el desarrollo asintótico*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

en un conjunto R *(no necesariamente recinto), si éste contiene caminos de integración que hacen convergente la integral*

$$\int_z^{\infty} \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] dz$$

desde los puntos z *de* R *(como acontece cuando* R *es un recinto no acotado y* f (z) *continua en* R*), es válido el desarrollo*

$$F(z) = -\int_z^{\infty} \left[f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right] dz \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{nz^n}$$

en todo subconjunto R_1 *de* R *donde se conservan acotados para cada* n *los productos*

$$|z|^n \int_z^{\infty} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}} < M_n .$$

b) *Si* f (z) *satisface en* R *la condición de Watson-Nevanlinna, la de Denjoy o la de Carleman-Ostrowski,* F(z) *satisface la misma en el subconjunto de* R_1 *donde se conserva acotada con independencia de* n *la raíz* n*-ésima:*

$$|z| \sqrt[n]{\int_z^{\infty} \frac{|dz|}{|z|^{n+1}}} < \sqrt[n]{M_n} < K .$$

c) *Esto se verifica, en particular, en la prolongación de un sector circular de vértice* 0 (*), como puede verse con cálculo

---

tremos de abscisas 0 y 1, $\frac{1}{2}$ y 2; $\frac{1}{4}$ y 3, ... respectivamente, cerrando el recinto por la derecha con los segmentos verticales que proyectan cada extremo de un segmento horizontales sobre el siguiente. En este recinto, todas las quebradas que unen $z_i \to \infty$, tienen como puntos de acumulación inevitables 0 e ∞.

(*) Este teorema contiene como caso particular el clásico de interpretación en el campo real. Véase por ejemplo, Borel. —*Leçons sur les séries divergentes.*—París, Gauthier-Villars, 2ª ed., 1926.

análogo al del propio punto; y con idéntico razonamiento que entonces, resulta:

Si una serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ *admite aproximación asintótica óptima holomorfa* f (z) *en la prolongación de un sector circular de vértice* 0, *las series derivada y primitiva* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} - \frac{n\, a_n}{z^{n+1}}$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} - \frac{a_{n+1}}{n\, z^n}$ *tienen aproximación asintótica óptima en el mismo campo, que son, respectivamente, la derivada* f' (z) *y la integral* $F(z) = -\int_z^{\infty} \left[f(z) - a_0 - \frac{a'_0}{z} \right] dz$.

SOMMAIRE

Ce mémoire contient des théorèmes généraux sur la dérivation et sur l'intégration des développements en série asymptotique, et des applications à l'approximation asymptotique optimum.

(Original recibido en Mayo de 1938).