ALEJANDRO TERRACINI

Sobre la existencia de superficies cuyas líneas principales son dadas

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación Nº 16

BUENOS AIRES

1940

SOBRE LA EXISTENCIA DE SUPERFICIES CUYAS LINEAS PRINCIPALES SON DADAS

por ALEJANDRO TERRACINI

Las líneas más importantes trazadas sobre una superficie S del espacio proyectivo de cinco dimensiones S_5 son sin duda sus *líneas principales* (1). De estas líneas pueden darse varias definiciones, entre las cuales recordamos las siguientes:

a) Hay ∞^1 hiperplanos que cortan la superficie S según una línea que tiene un punto cuspidal en un punto dado x de la superficie; hay generalmente *cinco* de estos ∞^1 hiperplanos para cada uno de los cuales el punto x viene a ser un tacnodo. Las correspondientes rectas tangentes en el punto x son las *cinco tangentes principales.* Estas tangentes principales envuelven sobre la superficie S los *cinco sistemas de curvas principales* (2).

b) Las tangentes principales en el punto x pueden definirse como las que pertenecen a aquellas curvas de la superficie S que pasan por el punto x de tal manera que sus S_3 osculadores en el mismo punto x coincidan con los S_3 que son 2-tangentes a la superficie en el punto x según la dirección de las mismas curvas (3).

c) A lo largo de una curva principal dos planos tangentes consecutivos resultan incidentes según un orden de aproximación σ más grande que 2 (que es el valor ordinario de σ para dos planos tangentes consecutivos de una superficie de S_5) y por consiguiente $\geqq 4$ (4).

---

(1) Para poder admitir también líneas principales imaginarias (como lo sobreentenderemos en lo sucesivo de esta Memoria) suponemos que la superficie S sea analítica aunque esta hipótesis no es siempre necesaria.

(2) CORRADO SEGRE: *Preliminari di una teoría delle varietà luoghi di spazi,* Rend. del Circ. Matem. di Palermo, t. XXX, 1910, Núm. 24.

(3) E. BOMPIANI: *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero,* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XLVIII, 1913.

(4) A. TERRACINI: *Sull'incidenza di spazi infinitamente vicini* (*Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari,* Pavia, 1936). V. también CORRADO SEGRE: *Sulle linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietá caratteristica della superficie di Veronese,* Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5), vol. XXX, 1921.

Tomó últimamente nuevo interés el estudio de las curvas principales, después que BLASCHKE [1] acudió a ellas en unas investigaciones de carácter topológico, en cuanto coordenó unas particularidades topológicas de un 5-*tejido* (5-*Gewebe*) [2] de líneas planas con unas circunstancias especiales que pueden afectar las curvas principales de una superficie.

Pero, a pesar del hecho que la primera aparición de las curvas principales se remonta a treinta años atrás, pocas cosas son conocidas sobre ellas.

Por ejemplo, no se sabe todavía si, dada a priori arbitrariamente la ecuación diferencial de las líneas principales, puede afirmarse la existencia de una superficie que tenga efectivamente esas líneas principales. Esta laguna ha sido indicada también por W. BLASCHKE y G. BOL en su nuevo libro: *Geometrie der Gewebe* (Berlin, 1938).

Yo logro en este trabajo llenar esa laguna, probando que puede contestarse afirmativamente a la pregunta. Ya resumí los resultados de mis investigaciones en una breve comunicación a la Académie des Sciences de París [3], y doy ahora una relación más detallada de ellas.

Del siguiente tratamiento del argumento resultará también que, dada la ecuación de las curvas principales, hay todavía un cierto grado de indeterminación en las superficies que tienen esas curvas principales. Por consiguiente, las propiedades proyectivas de las superficies pueden reflejar particularidades topológicas de sus curvas principales sólo en un grado limitado. Por lo tanto, el lazo descubierto por BLASCHKE, aunque se refiere a un caso especial, parece particularmente notable. Pero por la misma razón no parece probable que puedan esperarse muchas otras ulteriores relaciones de este género.

1.—Sean x_i $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ coordenadas proyectivas homogéneas de los puntos x de un espacio de cinco dimensiones S_5. Las

---

(1) *Über die tangenten einer ebenen Kurve fünfter Klasse,* Abh. d. mathem. Sem. der Hamburger Universität, vol. 9, 1933.

(2) Un 5-*tejido* está constituído por cinco familias ∞^1 de curvas tales que todas estas familias cubran simplemente una misma región. Las particularidades mencionadas son: I) refiriéndonos a un 5-*tejido,* que su *rango* sea máximo; II) refiriéndonos a una superficie, que a lo largo de cada curva de cada sistema de líneas principales los planos tangentes estén en un hiperplano.

(3) A. TERRACINI: *Sur l'existence de surfaces ayant des lignes principales données,* Comptes rendus de l'Acad. des Sciences de París, 1939.

consideraremos como funciones de dos parámetros independientes u, v, o mejor, más brevemente, consideraremos al punto x como una función de los mismos parámetros. Escribiré x_u para $\partial x/\partial u$, etc.

Es bien sabido que la ecuación diferencial de las curvas principales es:

$$(1.1) \quad | x, x_u, x_v, x_{uu}\, du + x_{uv}\, dv, \;\; x_{uv}\, du + x_{vv}\, d_v, \\ x_{uuu}\, du^3 + 3\, x_{uuv}\, du^2\, dv + 3\, x_{uvv}\, du\, dv^2 + x_{vvv}\, dv^3 \,| = 0,$$

donde con la notación usada en el primer miembro entendemos indicar el determinante obtenido substituyendo x por las seis coordenadas del mismo punto. Indicaremos el mismo determinante también con Ω.

Con notaciones análogas si ponemos:

$$\begin{cases} | x, x_u, x_v, x_{uu}, \;\; x_{uv}, \;\; x_{uuu} \,| = h, \\ 3 \,| x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{uuv} \,| + | x, x_u, x_v, x_{uu}, \;\; x_{vv}, x_{uuu} \,| = l, \end{cases}$$

. . . . ,

. . . . ,

etc., la ecuación (1.1) puede escribirse:

$$(1.2) \quad h\, du^5 + l\, du^4\, dv + m\, du^3\, dv^2 + n\, du^2\, dv^3 + p\, du\, dv^4 + k\, dv^5 = 0.$$

Como la dimensión del espacio es 5, hay seis puntos, entre el punto x y sus derivados sucesivos, que son linealmente independientes; cada uno de los restantes puntos derivados puede expresarse como combinación lineal de ellos. Así, si los puntos x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} son linealmente independientes, es decir si la superficie S no representa ninguna ecuación de Laplace, obtenemos el *sistema de ecuaciones fundamentales de la superficie* S:

$$(1.3) \quad \begin{cases} x_{uuu} = a^{(1)} x + b^{(1)}\, x_u + c^{(1)} x_v + \alpha x_{uu} + \beta x_{uv} + \tau x_{vv} \\ x_{uuv} = a^{(2)} x + b^{(2)}\, x_u + c^{(2)} x_v + \gamma x_{uu} + \delta x_{uv} + \varepsilon x_{vv}, \\ x_{uvv} = a^{(3)} x + b^{(3)} x_u + c^{(3)} x_v + \eta\, x_{uu} + \lambda_{uv} + \mu x_{vv}, \\ x_{vvv} = a^{(4)} x + b^{(4)} x_u + c^{(4)} x_v + \omega x_{uu} + \nu x_{uv} + \varrho x_{vv}, \end{cases}$$

donde los 24 coeficientes son funciones de las coordenadas curvilíneas u, v. El sistema (1.3) representa una clase de superficies S proyectivamente equivalentes. Poniendo:

$$(1.4) \qquad | x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} \,| = \Delta$$

($\Delta \neq 0$), la ecuación (1.2) puede dividirse por Δ y escribirse en la forma:

$$(1.5)\quad H du^5 + L du^4 dv + M du^3 dv^2 + N du^2 dv^3 + P du dv^4 + K dv^5 = 0,$$

donde

$$(1.6)\quad \begin{cases} H = \dfrac{h}{\Delta} = \tau\,;\ L = \dfrac{l}{\Delta} = 3\varepsilon - \beta\,;\ M = \dfrac{m}{\Delta} = \alpha - 3\delta + 3\mu\,; \\ N = \dfrac{n}{\Delta} = \varrho - 3\lambda + 3\gamma\,;\ P = \dfrac{p}{\Delta} = 3\eta - \nu\,;\ K = \dfrac{k}{\Delta} = \omega\,. \end{cases}$$

Todo esto, hasta este punto, es bien sabido. Pero, por lo que sé, me parece que la observación siguiente no ha sido todavía efectuada. Una transformación de la forma.

$$(1.7)\qquad x = \vartheta\,(u, v)\, X$$

lleva los primeros miembros de cada una de las ecuaciones (1.1) y (1.4) a las expresiones análogas formadas empleando X en lugar de x, a menos del factor ϑ^6. Por lo tanto las expresiones $H, L, M, N, P, K,$ son invariantes por la transformación (1.7).

Además, transformemos las coordenadas curvilíneas de manera de conservar cada uno de los sistemas de líneas paramétricas, poniendo:

$$(1.8)\qquad u = u\,(u_1), \quad v = v\,(v_1).$$

Se controla fácilmente que la forma diferencial fraccionaria:

$$(1.9)\quad \frac{H du^5 + L du^4 dv + M du^3 dv^2 + N du^2 dv^3 + P du dv^4 + K dv^5}{3\, du^2\, dv^2}$$

queda invariada después de la transformación (1.8). Por consiguiente *la forma diferencial fraccionaria* (1.9) *ligada con una superficie del espacio* S_5 (*que no representa ninguna ecuación de Laplace*) *depende únicamente de la superficie y de la elección de las líneas paramétricas.*

Podemos llamar a la forma (1.9) *forma diferencial fundamental de la superficie S,* a pesar del hecho que depende de las curvas paramétricas.

2.—De la precedente observación sobre la forma diferencial fundamental (1.9) sigue que debe ser posible encontrar una significación geométrica de ella.

Para hallar tal significación, consideremos un punto $x=x(u\ v)$ sobre la superficie, una dirección (1) por este punto —que es dada como razón de las diferenciales du, dv— y el hiperplano ξ que es 2-tangente a la superficie S en el punto x según la dirección dada, es decir el hiperplano que contiene los planos tangentes en cada uno de los puntos x y $x\ (u+du, v+dv)$. Si C es una curva de la superficie que pasa por el punto x en esta dirección, y $\bar{x}$ es otro punto de la línea C que esté en proximidad del punto x, cada una de las líneas paramétricas que pasan por el punto $\bar{x}$ corta la curva paramétrica del otro sistema que pasa por el punto x en un punto. Sean x_1 y x_2 los puntos así logrados, donde p. e. x_1 pertenece a la curva u (es decir $v=$const.) que pasa por x. La recta $\bar{x}x_1$ corta el hiperplano ξ en un punto X_1. Finalmente sea m un punto arbitrario de la misma recta $\bar{x}x_1$ que no se acerca indefinidamente al punto x cuando $\bar{x} \to x$.

El término principal de la razón anarmónica:

$$(2.1) \qquad (\bar{x}\ \ x_1\ \ X_1\ \ m)$$

cuando $\bar{x} \to x$ *coincide con la forma diferencial fundamental* (1.9) (2).

Si substituímos la recta $\bar{x}x_1$ con $\bar{x}x_2$ y los puntos X_1, m con X_2, n definidos de manera análoga, *también el término principal de la razón anarmónica:*

$$(2.2) \qquad (\bar{x}\ \ x_2\ \ X_2\ \ n)$$

coincide con la misma forma diferencial fundamental.

Podemos observar que cada una de las razones anarmónicas consideradas no es simétrica respecto a los sistemas de líneas paramétricas; pero, a pesar de eso, ambas razones anarmónicas llevan a la misma forma diferencial.

Para demostrar el teorema, observo que el S_4 ξ es determinado por los puntos:

$$x,\ x_u,\ x_v,\ x_{uu}\, du + x_{uv}\, dv,\ x_{uv}\, du + x_{vv}\, dv\,.$$

---

(1) Suponemos que esta dirección es distinta de las de ambas líneas paramétricas que pasan por el punto x.

(2) Esta propiedad muestra cierta analogía con la definición de las llamadas formas elementales de una superficie en el espacio ordinario dada por E. Bompiani: *Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie,* Boll. dell'Un. mat. italiana, 1926.

Razonaré sobre la razón anarmónica (2.1); pero lo mismo podría hacerse sobre la razón anarmónica (2.2). Expresemos los puntos de la recta $\bar{x}x_1$ como combinaciones lineales $A\bar{x}+Bx_1$ de los puntos $\bar{x}$, x_1. Ahora:

$$\bar{x}=x+dx+\frac{1}{2}d^2x+\frac{1}{6}\bar{d}^3x+\ldots \tag{2.3}$$

y:

$$x_1=x+x_udu+{}^1/_2(x_ud^2u+x_{uu}du^2)+ \tag{2.4}$$

$$+{}^1/_6\,(x_ud^3u+3x_{uu}dud^2u+x_{uuu}du^3)\ldots$$

El valor de la razón B/A en el punto X_1 está determinado por la ecuación:

$$|x,x_u,x_v,x_{uu}du+x_{uv}dv,x_{uv}du+x_{vv}d_v,A({}^1/_2d^2x+{}^1/_6d^3x\ldots)+ \tag{2.5}$$
$$+{}^1/_2B(x_{uu}du^2+x_{uu}dud^2u+{}^1/_3\,x_{uuu}du^3+x_{uuv}du^2dv+x_{uvv}dudv^2+$$
$${}^1/_3x_{vvv}dv^3+\ldots)|=0.$$

Por consiguiente tenemos como término principal

$$\frac{A}{B}=-\frac{3\,\Delta\,du^2\,dv^2}{\Omega} \tag{2.6}$$

con tal que el determinante escrito en el denominador no sea cero, lo que puede suponerse si la superficie S no representa ninguna ecuación de Laplace. En este caso, substituyendo x_{uuu} x_{uuv}, x_{uvv}, x_{vvv} según las ecuaciones fundamentales (1.3) obtenemos:

$$\frac{B}{A}=-\frac{Hdu^5+Ldu^4dv+Mdu^3dv^2+Ndu^2dv^3+Pdudv^4+Kdv^5}{3\,du^2dv^2} \tag{2.7}$$

Para el punto m, el límite de B/A cuando $\bar{x}\to x$ tiene que ser -1 para que sean eliminados los términos de (2.3) y (2.4) que no dependen de las diferenciales. Por lo tanto el término principal de la razón anarmónica (2.1) es el mismo que el de la razón anarmónica formada por ∞, 0, -1 y el valor de B/A expresado por (2.7), es decir coincide con (1.9).

3.—Aunque nos interesen principalmente las superficies que no representan ninguna ecuación de Laplace, vale la pena hallar qué vienen a ser los términos principales de las razones anarmónicas (2.1) y (2.2) cuando la superficie representa una ecuación de

LAPLACE. En este caso los seis puntos x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} son ligados por una ecuación lineal homogénea de tipo no parabólico o parabólico. Supongo que los S_3 osculadores de las curvas paramétricas no sean contenidos en los correspondientes S_4 osculadores de la superficie [1]. También ahora considero p. e. (2.1). El tratamiento del n.2 puede aplicarse también ahora hasta la fórmula (2.5) incluída. De esta fórmula, en las circunstancias actuales, sigue

$$(3.1)\quad \frac{B}{A}=-\frac{\Omega}{|x,x_u,x_v,x_{uu}\,du+x_{uv}dv,x_{uv}du+x_{vv}dv,x_{uuu}|\,du^3}.$$

Por consiguiente, usando este valor de B/A en lugar del valor dado por (2.7), nos encontramos en condición de concluir que si la superficie representa una ecuación de Laplace, el término principal de la razón anarmónica (2.1) cuando $\bar{x}\to x$, coincide con la forma diferencial escrita en el segundo miembro de (3.1), con el signo cambiado.

Es importante observar que en el caso actual:

1) La estructura de la nueva forma diferencial es completamente distinta de la del caso precedente. Ahora, por ejemplo, el numerador y el denominador resultan del mismo grado. Más precisamente en el caso actual —como se averigua fácilmente— numerador y denominador de dicho término principal admiten un divisor común de segundo grado (que igualado a cero representa el doble sistema de las características). Por lo tanto numerador y denominador pueden reducirse a formas de tercer grado. La segunda, evidentemente, es proporcional a du^3, mientras que la primera, si la igualamos a cero, representa los tres sistemas ulteriores de líneas principales (v. la última citación hecha al fin de esta Memoria). Cuando la ecuación de LAPLACE es de tipo parabólico, caben ulteriores reducciones.

---

(1) Esta hipótesis no sería nunca realizada si el S_4 osculador a la superficie en el punto x contuviese el S_3 osculador en el mismo punto a cada curva trazada sobre la superficie que pasa por el punto x. Pero en este caso la superficie estaría en un espacio S_4. Observamos también que el contenido del n. 3 se aplica al caso expresamente enunciado en el texto, en que la superficie representa sólo una ecuación de LAPLACE; si representase dos de ellas, sería una superficie desarrollable, y entonces numerador y denominador de la fracción escrita en el segundo miembro de (3.1) serían ambos idénticamente nulos.

2) Las dos razones anarmónicas (2.1) y (2.2) no llevan ya a la misma forma diferencial.

4.—Volvamos ahora al caso general, y consideremos los problemas siguientes:

Problema A.—*¿Siendo dada arbitrariamente la ecuación diferencial* (1.5), *existe una superficie tal que la ecuación de sus líneas principales coincida con* (1.5)?

Problema B.—*¿Siendo dada arbitrariamente la forma diferencial fraccionaria* (1.9) *existe una superficie tal que su forma diferencial fundamental coincida con* (1.9)?

Las superficies que eventualmente satisfagan a la condición enunciada en el problema B) tienen que ser buscadas entre las superficies que no representan ninguna ecuación de Laplace, como es claro. En cuanto al problema A), esto no es ya necesario; pero veremos que la pregunta que constituye el contenido del problema A) siempre se contesta afirmativamente, aun no considerando las eventuales soluciones que pueden ser suministradas por superficies que representan ecuaciones de Laplace. Por lo tanto nos limitaremos, en ambos casos, a estudiar superficies que no representan ninguna ecuación de Laplace.

Una tal superficie será representada por un sistema de ecuaciones fundamentales del tipo (1.3). Ella está determinada de manera única, a menos de una transformación homográfica, cuando las 24 funciones que aparecen como coeficientes en aquellas ecuaciones son efectivamente conocidas. Por lo tanto consideraremos como incógnitas, en lugar de la superficie S, a las 24 funciones mencionadas.

De cualquier manera que se encare la cuestión, es imposible evitar una cierta complicación, que es inherente a la complejidad intrínseca del argumento. Sólo podemos tratar de reducir la complicación en lo posible. Esta consideración justifica un examen previo de la manera más conveniente de dirigir el tratamiento.

Si el segundo problema admitiese una respuesta afirmativa, ésta ya contendría en sí, al mismo tiempo, una análoga contestación afirmativa al primer problema. Por eso, parecería conveniente encarar directamente el problema B). Ahora bien, al examinar superficialmente este problema, podríamos sentirnos inducidos a tratar de comprobar que siempre es resoluble, debido a la circunstancia que las 24 funciones incógnitas están sujetas a:

1) las condiciones de integrabilidad del sistema (1.3), que son en número de 18 (esas condiciones se encuentran escritas explícitamente más adelante):

2) las ecuaciones que traducen las condiciones efectivamente implicadas por el problema B): estas condiciones llevan a 6 ecuaciones ulteriores en las 24 funciones incógnitas.

En consecuencia el problema B) lleva a un sistema de 24 ecuaciones en 24 funciones incógnitas. Sin embargo, considerando la observación del n. 1, parece menos probable que tal sistema sea compatible. En efecto, si existe un conjunto de 24 funciones que satisfacen a ese sistema, éste tiene que ser todavía satisfecho cuando aquellas funciones son reemplazadas por las nuevas 24 funciones en que aquéllas se transforman cuando las coordenadas homogéneas de los puntos se multiplican por una función arbitraria. Con palabras poco diferentes, esto equivale a decir que mediante la transformación (1.7) la función μ se transforma en otra función $\bar{\mu}$ tal que: (1)

$$\mu = \bar{\mu} + \frac{\vartheta_u}{\vartheta} , \tag{4.1}$$

y por consiguiente siempre es posible escoger la función $\vartheta(u, v)$ de manera que el nuevo valor de la función μ resulte idénticamente nulo. Luego el conjunto de las 24 ecuaciones de condición realmente implica sólo 23 funciones incógnitas.

En estas condiciones he preferido estudiar el problema A) en lugar del problema B). El tratamiento efectivo de este problema enseñará que la respuesta es afirmativa, como ya lo hemos mencionado. Al mismo tiempo resultará confirmado que, por lo contrario, generalmente el problema B) no admite soluciones.

Naturalmente las condiciones de integrabilidad del sistema de ecuaciones fundamentales (1.3) desempeñan un papel notable. Ocurre, como lo veremos, que ellas pueden resolverse en términos

(1) Las funciones β, τ, ε, η, ω, ν quedan invariadas, mientras:

$$\alpha=\bar{\alpha}+3\frac{\vartheta_u}{\vartheta}\ ;\ \gamma=\bar{\gamma}+\frac{\vartheta_v}{\vartheta}\ ;\ \delta=\bar{\delta}+2\frac{\vartheta_u}{\vartheta}\ ;\ \lambda=\bar{\lambda}+2\frac{\vartheta_v}{\vartheta}\ ;\ \varrho=\bar{\varrho}+3\frac{\vartheta_v}{\vartheta}.$$

finitos respecto a 12 de las funciones incógnitas, y precisamente a las que aparecen como coeficientes de x, x_u, x_v. Sigue que es posible volver a escribirlas conservando como funciones incógnitas solamente:

$$(4.2) \qquad \alpha,\ \beta,\ \tau,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \eta,\ \lambda,\ \mu,\ \nu,\ \varrho,\ \omega\,.$$

Existe el inconveniente que de esta manera aquellas condiciones vienen a ser extremadamente engorrosas. Traté de disminuir este inconveniente teniendo en cuenta solamente los términos que sirven efectivamente para establecer el teorema de existencia.

5—Como es obvio, las condiciones de integrabilidad del sistema de ecuaciones fundamentales (1.3) se escriben confrontando los valores de x_{uuuv} logrados mediante la primera y la segunda ecuación, los valores de x_{uuvv} logrados mediante la segunda y la tercera, los valores de x_{uvvv} logrados mediante la tercera y la cuarta. Siempre se tiene que escribir que los coeficientes de x, x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} logrados de las dos maneras, coinciden ordenadamente entre sí. De esta manera se obtienen 18 condiciones. Indicaré p. e. con $(12\,x)$ la condición obtenida confrontando los coeficientes de x implicados en la ecuación lograda al derivar la primera y la segunda de las ecuaciones fundamentales, ..., con $(34\,x_{vv})$ la condición obtenida confrontando los coeficientes de x_{vv} implicados en la ecuación lograda al derivar la tercera y la cuarta.

Es conveniente empezar a escribir las condiciones siguientes, que ofrecen la ventaja de dar enseguida seis de las funciones incógnitas expresadas por medio de las funciones (4.2):

$$\begin{array}{ll}
(12x_{uu}) & b^{(2)}=\alpha_v-\gamma_u+\beta\eta+\tau\omega-\gamma\delta-\varepsilon\eta\,,\\
(23x_{uu}) & b^{(3)}=\gamma_v-\eta_u+\gamma^2+\delta\eta+\varepsilon\omega-\eta\alpha-\lambda\gamma-\mu\eta\,,\\
(34x_{uu}) & b^{(4)}=\eta_v-\omega_u+\eta\gamma+\lambda\eta+\mu\omega-\alpha\omega-\nu\gamma-\varrho\eta\,,\\
(12x_{vv}) & c^{(1)}=\varepsilon_u-\tau_v+\gamma\tau+\delta\varepsilon+\varepsilon\mu-\alpha\varepsilon-\beta\mu-\tau\varrho\,,\\
(23x_{vv}) & c^{(2)}=\mu_u-\varepsilon_v+\eta\tau+\lambda\varepsilon+\mu^2-\gamma\varepsilon-\delta\mu-\varepsilon\varrho\,,\\
(34x_{vv}) & c^{(3)}=\varrho_u-\mu_v+\omega\tau+\nu\varepsilon-\varepsilon\eta-\lambda\mu\,.
\end{array}$$

Escribamos ahora las condiciones $(12x_{uv})$ y $(34x_{uv})$. Teniendo en cuenta los valores de $c^{(2)}$ y $b^{(3)}$ que ya han sido determinados, ellas dan también los valores de las restantes b y c, expresados por medio de las mismas funciones (4.2), es decir:

$$(12x_{uv}) \quad b^{(1)}=\mu_u-\varepsilon_v+\delta_u-\beta_v+\eta\tau+\mu^2-\gamma\varepsilon-\delta\mu-\varepsilon\varrho$$

$$+\gamma\beta+\delta^2+2\varepsilon\lambda-\alpha\delta-\beta\lambda-\tau\nu\,,$$

$$(34x_{uv})\quad c^{(4)}=\gamma_v-\eta_u+\lambda_v-\nu_u+\gamma^2+\varepsilon\omega-\eta\alpha-\lambda\gamma-\mu\eta+2\eta\delta$$
$$+\lambda^2+\mu\nu-\omega\beta-\gamma\nu-\varrho\lambda\,.$$

Cada una de las expresiones logradas para las b y las c contiene, además de las funciones (4.2) sólo sus primeras derivadas, y resulta lineal respecto a estas derivadas.

También cada una de las a puede ahora expresarse de manera análoga:

$$(12x_v)\quad a^{(1)}=c_u{}^{(2)}-c_v{}^{(1)}+\gamma c^{(1)}+(\delta-\alpha)\,c^{(2)}+(\varepsilon-\beta)\,c^{(3)}-\tau c^{(4)}\,,$$
$$(12x_u)\quad a^{(2)}=b_v{}^{(1)}-b_u{}^{(2)}-\gamma b^{(1)}+(\alpha-\delta)\,b^{(2)}+(\beta-\varepsilon)\,b^{(3)}+\tau b^{(4)}\,,$$
$$(34x_v)\quad a^{(3)}=c_u{}^{(4)}-c_v{}^{(3)}+\omega c^{(1)}+(\nu-\eta)\,c^{(2)}+(\varrho-\lambda)\,c^{(3)}-\mu c^{(4)}\,,$$
$$(34x_u)\quad a^{(4)}=b_v{}^{(3)}-b_u{}^{(4)}-\omega b^{(1)}+(\eta-\nu)\,b^{(2)}+(\lambda-\varrho)\,b^{(3)}+\mu b^{(4)}\,.$$

Cada una de las expresiones logradas para las a contiene, además de las funciones (4.2), sus derivadas primeras y segundas, y es lineal respecto a las derivadas segundas.

En los segundos miembros de estas ecuaciones no substituímos materialmente las b y las c según sus expresiones que encontramos anteriormente. Pero ya es claro que de esta manera también las a pueden expresarse por medio de las funciones (4.2).

Finalmente tenemos seis condiciones más de integrabilidad, a saber:

$$(12x)\qquad \gamma a^{(1)}+(\delta-\alpha)\,a^{(2)}+(\varepsilon-\beta)\,a^{(3)}-\tau a^{(4)}+a_u{}^{(2)}-a_v{}^{(1)}=0\,,$$
$$(34x)\qquad -\omega a^{(1)}+(\eta-\nu)\,a^{(2)}+(\lambda-\varrho)\,a^{(3)}+\mu a^{(4)}+a_v{}^{(3)}-a_u{}^{(4)}=0\,,$$
$$(23x)\qquad -\eta a^{(1)}+(\gamma-\lambda)\,a^{(2)}+(\delta-\mu)\,a^{(3)}+\varepsilon a^{(4)}+a_v{}^{(2)}-a_u{}^{(3)}=0,$$
$$(23x_{uv})\qquad \gamma_u+\varrho_u+\lambda_u=\alpha_v+\delta_v+\mu_v\,,$$
$$(23x_u)\qquad b_v{}^{(2)}-b_u{}^{(3)}=a^{(3)}+\eta b^{(1)}+(\lambda-\gamma)\,b^{(2)}+(\mu-\delta)\,b^{(3)}-\varepsilon b^{(4)}\,,$$
$$(23x_v)\qquad c_u{}^{(3)}-c_v{}^{(2)}=a^{(2)}-\eta c^{(1)}+(\gamma-\lambda)\,c^{(2)}+(\delta-\mu)\,c^{(3)}+\varepsilon c^{(4)}\,.$$

Podemos considerar estas seis últimas condiciones como las únicas condiciones de integrabilidad, con tal que las a, b, c sean substituídas según las 12 condiciones precedentes. Indicaremos esas seis ecuaciones, según la forma que tomarían después de la substitución efectiva, como ecuaciones (I), (II), ..., (VI), sin escribirlas de nuevo completamente. Por el momento, sólo observamos que cada una de ellas es lineal respecto a las derivadas de orden máximo implicadas en la misma. Sin embargo es conveniente poner en evidencia los términos que contienen esas derivadas de orden máximo, para tener una guía en cuanto a la manera más conveniente de aprovechar las mismas ecuaciones. Ellos son:

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & -\alpha_{uuv}-\beta_{uvv}+\gamma_{uuu}+\delta_{uuv}+\varepsilon_{uvv}-\tau_{vvv}+\ldots=0\,, \\
(\mathrm{II}) & -\varrho_{uvv}-\nu_{uuv}+\mu_{vvv}+\lambda_{uvv}+\eta_{uuv}-\omega_{uuu}+\ldots=0\,, \\
(\mathrm{III}) & -\alpha_{uvv}+\varrho_{uuv}-\beta_{vvv}+\nu_{uuu}+\delta_{uvv}-\lambda_{uuv}-\varepsilon_{vvv}+\eta_{uuu}+\ldots=0\,, \\
(\mathrm{IV}) & \gamma_u+\varrho_u+\lambda_u-\alpha_v-\delta_v-\mu_v=0\,, \\
(\mathrm{V}) & 2\eta_{uu}+\nu_{uu}-3\gamma_{uv}-\lambda_{uv}+\varrho_{uv}+\alpha_{vv}-\mu_{vv}+\ldots=0\,, \\
(\mathrm{VI}) & 2\varepsilon_{vv}+\beta_{vv}-3\mu_{uv}-\delta_{uv}+\alpha_{uv}+\varrho_{uu}-\gamma_{uu}+\ldots=0\,.
\end{array}
$$

6.—Emprendamos ahora la discusión de las condiciones ulteriores impuestas por el problema A). Siendo dada a priori la ecuación diferencial (1.5), H, L, M, N, P, K son 6 funciones dadas de u, v. Por eso, según las fórmulas (1.6), las doce funciones (4.2) son sujetas a las seis nuevas condiciones:

$$
(6.1)\qquad \begin{cases} \tau=\sigma H\,;\ 3\varepsilon-\beta=\sigma L\,;\ \alpha-3\delta+3\mu=\sigma M\,; \\ \varrho-3\lambda+3\gamma=\sigma N\,;\ 3\eta-\nu=\sigma P\,;\ \omega=\sigma K\,; \end{cases}
$$

donde $\sigma=\sigma\,(u, v)$ indica una nueva función incógnita.

Resumiendo, tenemos ahora trece funciones incógnitas, es decir la función $\sigma\,(u, v)$ y las doce funciones (4.2): ellas son ligadas por las seis ecuaciones a derivadas parciales (I), (II), ..., (VI) y por las seis ecuaciones en términos finitos (6.1).

Como es natural, eliminamos seis de las funciones incógnitas por medio de las ecuaciones (6.1). Por ejemplo podemos despejar de éstas α, β, τ, ω, ν, ϱ y logramos:

$$
(6.2)\qquad \begin{cases} \alpha=-3\mu+3\delta+M\sigma\,;\ \beta=3\varepsilon-L\sigma\,;\tau=H\sigma\,; \\ \omega=K\sigma\,;\ \nu=3\eta-P\sigma\,;\varrho=-3\gamma+3\lambda+N\sigma\,. \end{cases}
$$

Substituyendo en las ecuaciones (I), (II), ..., (VI), éstas contendrán sólo las siete funciones incógnitas:

$$
(6.3)\qquad \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \eta,\ \lambda,\ \mu,\ \sigma\,.
$$

Nuestro problema A) queda así esquematizado por el sistema constituído por las ecuaciones (I), (II), ..., (VI) después de la substitución. Desde ahora pues la cuestión queda reducida al estudio de este sistema de seis ecuaciones a derivadas parciales en las siete funciones incógnitas (6.3). Llamaremos (Σ) a este sistema.

Pero, antes de transformar dichas ecuaciones, conviene observar que su forma sugiere eliminar las derivadas terceras de las dos funciones incógnitas ε, η en las tres primeras ecuaciones por medio de (V) y (VI). Por esta razón substituímos las ecuaciones (I), (II), (III) por las nuevas ecuaciones:

$$(\mathrm{I'})=5(\mathrm{I})+2(\mathrm{VI})_u;\quad (\mathrm{II'})=5(\mathrm{II})+2(\mathrm{V})_v;$$
$$(\mathrm{III'})=5(\mathrm{III})-4(\mathrm{V})_u+4(\mathrm{VI})_v,$$

donde por ejemplo $5(\mathrm{I})+2(\mathrm{VI})_u$ indica la combinación lineal de la ecuación (I) y de la obtenida derivando (VI) respecto a u, siendo 5 y 2 los coeficientes de la combinación lineal. El sistema (Σ) es representado por las ecuaciones (I'), (II'), (III'), (IV), (V) (VI) así como lo era por las ecuaciones originales (I), (II), (III), (IV), (V), (VI).

Considerando todo esto, el sistema (Σ) puede escribirse:

$$(\mathrm{I'})\quad 6\lambda_{uuu}-3\gamma_{uuu}+3\mu_{uuv}-6\delta_{uuv}+2N\sigma_{uuu}-3M\sigma_{uuv}+3L\sigma_{uvv}-5H\sigma_{vvv}+\ldots=0,$$

$$(\mathrm{II'})\quad -6\lambda_{uvv}+3\gamma_{uvv}-3\mu_{vvv}+6\delta_{vvv}-5K\sigma_{uuu}+3P\sigma_{uuv}-3N\sigma_{uvv}+2M\sigma_{vvv}+\ldots=0,$$

$$(\mathrm{III'})\quad 14\lambda_{uuv}-7\gamma_{uuv}+7\mu_{uvv}-14\delta_{uvv}-P\sigma_{uuu}+5N\sigma_{uuv}-5M\sigma_{uvv}+L\sigma_{vvv}+\ldots=0,$$

$$(\mathrm{IV})\quad 4\lambda_u-2\gamma_u+2\mu_v-4\delta_v+N\sigma_u-M\sigma_v+(N_u-M_v)\sigma=0,$$

$$(\mathrm{V})\quad 5\eta_{uu}-6\gamma_{uv}+2\lambda_{uv}-4\mu_{vv}+3\delta_{vv}-P\sigma_{uu}+N\sigma_{uv}+M\sigma_{vv}+\ldots=0,$$

$$(\mathrm{VI})\quad 5\varepsilon_{vv}-6\mu_{uv}+2\delta_{uv}-4\gamma_{uu}+3\lambda_{uu}+N\sigma_{uu}+M\sigma_{uv}-L\sigma_{vv}+\ldots=0.$$

Ahora una ulterior transformación es sugerida por el examen de estas ecuaciones. Las derivadas terceras de las funciones incógnitas γ, δ, λ, μ se eliminan si substituímos las ecuaciones (I'), (II'), (III') por las ecuaciones:

$$(\mathrm{I''})=(\mathrm{I'})-{}^3/_2(\mathrm{IV})_{uu};\quad (\mathrm{II''})=(\mathrm{II'})+{}^3/_2(\mathrm{IV})_{vv};$$
$$(\mathrm{III''})=(\mathrm{III'})-{}^7/_2(\mathrm{IV})_{uv}.$$

Logramos así:

$$(\mathrm{I''})\quad {}^1/_2N\sigma_{uuu}-{}^3/_2M\sigma_{uuv}+3L\sigma_{uvv}-5H\sigma_{vvv}+\ldots=0,$$

$$(\mathrm{II}'') \quad -5K\sigma_{uuu}+3P\sigma_{uuv}-{}^{3}/_{2}N\sigma_{uvv}+{}^{1}/_{2}M\sigma_{vvv}+\ldots=0\,,$$
$$(\mathrm{III}'') \quad -P\sigma_{uuu}+{}^{3}/_{2}\,N\sigma_{uuv}-{}^{3}/_{2}M\sigma_{uvv}+L\sigma_{vvv}+\ldots=0\,.$$

Inicialmente el sistema (Σ) estaba constituído por las ecuaciones (I), (II), ..., (VI) que ya substituímos por las ecuaciones (I'), (II'), (III'), (IV), (V), (VI); a su vez éstas pueden substituírse por las ecuaciones (I''), (II''), (III''), (IV), (V), (VI), siendo el conjunto de las mismas equivalente al primero. Desde ahora consideraremos el sistema (Σ) como formado por estas últimas ecuaciones.

Desgraciadamente vemos que los términos que contienen las derivadas de orden máximo, que han sido los únicos tenidos en cuenta hasta ahora, no nos permiten llegar a una conclusión acerca de la existencia de un sistema de integrales del sistema (Σ), porque en las tres primeras ecuaciones esos términos contienen sólo la función incógnita σ, mientras que las últimas contienen todas las siete funciones incógnitas (6.3).

Por lo tanto formemos de nuevo las seis ecuaciones (I''), (II''), ..., (VI) teniendo en cuenta también las derivadas segundas en las tres primeras de ellas, excepto para la función σ, para la cual ya serán suficientes las derivadas terceras. Por este medio podremos llegar a nuestro objeto.

Más precisamente trataremos estas ecuaciones de manera que puedan resolverse respecto a unas derivadas de las funciones incógnitas, cuyos índices de derivación sean todos u. Ahora la ecuación (IV) da el valor de γ_u, y las derivadas de γ cuyos índices comprenden al menos una u, pueden deducirse de ella. Las ecuaciones (V) y (VI) dan respectivamente los valores de η_{uu} y λ_{uu}. Entonces, después de cálculos y reducciones bastante engorrosas, se logra escribir el sistema (Σ) en la forma siguiente:

$$(\mathrm{I}'') \quad \sigma[20H\gamma_{vv}-16L\delta_{vv}-2P\varepsilon_{uu}+4N\varepsilon_{uv}-6M\varepsilon_{vv}-20H\eta_{uv}+8L\lambda_{uv}$$
$$-10H\lambda_{vv}+16L\,\mu_{vv}]+{}^{1}/_{2}N\sigma_{uuu}-{}^{3}/_{2}\,M\sigma_{uuv}+3L\sigma_{uvv}-5H\sigma_{vvv}+\ldots=0\,,$$
$$(\mathrm{II}'') \quad \sigma[-10K\delta_{uu}+8P\delta_{uv}+18N\delta_{vv}-20K\varepsilon_{uv}+16P\varepsilon_{vv}$$
$$+4M\eta_{uv}-2L\eta_{uv}-12N\lambda_{uv}+20K\mu_{uu}-16P\mu_{uv}-12N\mu_{vv}]$$
$$-5K\sigma_{uuu}+3\,P\sigma_{uuv}-{}^{3}/_{2}N\sigma_{uvv}+{}^{1}/_{2}M\sigma_{vvv}+\ldots=0\,,$$
$$(\mathrm{III}'') \quad \sigma[-2L\gamma_{vv}-P\delta_{uu}+2N\delta_{uv}+13M\delta_{vv}+5K\varepsilon_{uu}-6P\varepsilon_{uv}+7N\,\varepsilon_{vv}+$$

$+6L\eta_{uv}-5H\eta_{vv}-8M\lambda_{uv}+L\lambda_{vv}+2P\mu_{uu}-4N\mu_{uv}-10M\mu_{vv}]$
$-P\sigma_{uuu}+{}^3/{}_2N\sigma_{uuv}-{}^3/{}_2M\sigma_{uvv}+L\sigma_{vvv}+\ldots=0$,

$$(\mathrm{IV})\quad \gamma_u=2\lambda_u+\mu_v-2\delta_v+\frac{N}{2}\sigma_u-\frac{M}{2}\sigma_v+\frac{N_u-M_v}{2}\sigma=0\,,$$

$$(\mathrm{V})\quad \eta_{uu}=2\lambda_{uv}+2\mu_{vv}-3\delta_{vv}+{}^1/{}_5(P\sigma_{uu}+2N\sigma_{uv}-4M\sigma_{vv})+\ldots=0\,,$$
$$(\mathrm{VI})\quad \lambda_{uu}=\varepsilon_{vv}-2\mu_{uv}+2\delta_{uv}-{}^1/{}_5(N\sigma_{uu}-3M\sigma_{uv}+L\sigma_{vv})+\ldots=0\,.$$

Ahora de las tres primeras de estas ecuaciones pueden despejarse σ_{uuu}, δ_{uu}, ε_{uu}, con tal que el determinante:

$$\begin{vmatrix} \tfrac{1}{2}N & 0 & -2P\sigma \\ -5K & -10K\sigma & 0 \\ -P & -P\sigma & 5K\sigma \end{vmatrix}$$

sea diferente de cero, es decir con tal que sea:

$$(7.1)\qquad K(2P^2-5KN)\neq 0\,.$$

8.—Por el momento, supongamos que la desigualdad (7.1) sea satisfecha, postergando hasta el nº 9 el examen del significado geométrico de esta hipótesis.

Podemos suponer sin restricción que μ sea idénticamente nulo (v. (4.1)); así tenemos solamente seis funciones incógnitas, es decir γ, δ, ε, η, λ, σ. Del sistema (Σ) podemos despejar cada una de las derivadas:

$$\sigma_{uuu},\quad \delta_{uu},\quad \varepsilon_{uu},\quad \gamma_u,\quad \eta_{uu},\quad \lambda_{uu}\,.$$

Para ellas resultan expresiones del tipo:

$$(8.1)\quad \left\{\begin{aligned}
\sigma_{uuu}&=\varphi^{(1)}(\gamma,\gamma_v,\gamma_{vv},\ \delta,\delta_u,\delta_v,\delta_{uv},\ \delta_{vv},\varepsilon,\varepsilon_u,\varepsilon_v,\ \varepsilon_{uv},\varepsilon_{vv},\\
&\qquad \eta,\eta_u,\eta_v,\ \eta_{uv},\eta_{vv},\lambda,\lambda_u,\ \lambda_v,\lambda_{uv},\ \lambda_{vv},\sigma,\sigma_u,\sigma_v\,,\\
&\qquad \sigma_{uu},\sigma_{uv},\sigma_{vv},\ \sigma_{uuv},\sigma_{uvv},\ \sigma_{vvv}),\\
\delta_{uu}&=\varphi^{(2)}(\ldots),\\
\varepsilon_{uu}&=\varphi^{(3)}(\ldots),\\
\gamma_u&=\varphi^{(4)}(\delta_v,\lambda_u,\sigma,\ \sigma_u,\sigma_v),\\
\eta_{uu}&=\varphi^{(5)}(\gamma,\gamma_v,\delta,\delta_u,\delta_v,\ \delta_{vv},\varepsilon,\varepsilon_u,\varepsilon_v,\eta,\eta_u,\ \eta_v,\lambda,\lambda_u,\lambda_v,\\
&\qquad \lambda_{uv},\sigma,\sigma_u,\sigma_v.\ \sigma_{uu},\sigma_{uv},\sigma_{vv}),\\
\lambda_{uu}&=\varphi^{(6)}(\gamma,\gamma_v,\delta,\ \delta_u,\delta_v,\delta_{uv},\varepsilon,\varepsilon_u,\ \varepsilon_v,\varepsilon_{vv},\eta,\eta_u,\ \eta_v,\\
&\qquad \lambda,\lambda_u,\lambda_v,\sigma,\sigma_v,\sigma_v,\ \sigma_{uu},\sigma_{uv},\sigma_{vv}),
\end{aligned}\right.$$

donde $\varphi^{(2)}$ y $\varphi^{(3)}$ dependen de las mismas funciones y derivadas de las cuales depende $\varphi^{(1)}$. No es necesario especificar la forma de las funciones $\varphi^{(i)}$.

Por consiguiente las ecuaciones (8.1) constituyen un sistema de un tipo un poco más general que el de SOFIA KOWALEWSKI. El teorema de completa integrabilidad subsiste también en estas condiciones más generales (1).

Por lo tanto podemos afirmar la existencia de un sistema de integrales que corresponden a un grupo conveniente de condiciones iniciales como lo haremos en el teorema del n.º 10.

9.—Pero, antes de enunciar nuestro resultado acerca del problema A), es preciso que establezcamos hasta qué punto la hipótesis (7.1) es realmente inevitable.

Esta hipótesis rige ciertamente excepto en el caso donde:

$$K = 0\,, \tag{9.1}$$

o bien:

$$2\,P^2 - 5\,K\,N = 0\,. \tag{9.2}$$

Luego tenemos un primer caso de excepción si las líneas paramétricas v (o sea u=const.) son curvas principales. Si este caso particular tuviese lugar, cambiaríamos las líneas paramétricas de tal manera que el nuevo valor de K no fuese ya idénticamente cero, y entonces nos reduciríamos al caso general. Hay sólo un caso en el cual, aun cambiando las líneas paramétricas, es imposible evitar la excepción presentada por (9.1): este caso se presenta cuando la ecuación diferencial dada (1.5) de las líneas principales se reduce a una identidad, lo que ocurre cuando la superficie S buscada debe tener curvas principales indeterminadas. Pero en este caso podemos acudir a un teorema bien conocido de CORRADO SEGRE (2): una superficie que tenga curvas principales indeterminadas es necesariamente una desarrollable, o una superficie de VERONESE. Aun dejando aparte esta efectiva enumeración de las superficies que tienen líneas principales indeterminadas, lo que realmente tiene interés para nosotros en este mo-

(1) C. RIQUIER: *Les systemes d'équations aux dérivées partielles*, París, 1910, v. p. 472.

(2) *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una propietá caratteristica della superficie di Veronese*, Nota II, Rend. della R. Acc. dei Lincei, (5), vol. XXX, 1921.

mento —relativamente a nuestro teorema de existencia— es que cuando la hipótesis (9.1) es invariante respecto a las transformaciones de las coordenadas curvilíneas, la existencia de la superficie buscada puede considerarse como cierta a priori.

Discutamos ahora (9.2). También en este caso, si se averigua la hipótesis particular considerada, se puede tratar de acudir a una transformación de las coordenadas curvilíneas tal que no deje subsistir aquella fórmula. También ahora debemos únicamente interesarnos por la manera según la cual podemos evitar la dificultad cuando esa fórmula resulta invariante respecto a cualquier transformación de las coordenadas curvilíneas.

Entre tanto debemos preguntarnos cuándo ocurre que una forma quíntica binaria en las dos variables y_2, y_1:

$$\Phi = Hy_1^5 + Ly_1^4y_2 + My_1^3y_2^2 + Ny_1^2y_2^3 + Py_1y_2^4 + Ky_2^5$$

presenta y conserva la particularidad (9.2) cualquiera que sea la transformación lineal homogénea a la cual se sometan las variables homogéneas y_1, y_2. Se ve fácilmente que la condición necesaria y suficiente es que la forma Φ sea la quinta potencia de una forma lineal.

En efecto, podemos suponer $K \neq 0$. El significado geométrico de la hipótesis (9.2) es que el grupo de cinco puntos que (en coordenadas proyectivas homogéneas y_1, y_2) es representado por la ecuación $\Phi = 0$ goza de la propiedad que el punto A ($y_1 = 0$, $y_2 = 1$) tiene su tercer grupo polar reducido a un punto doble B. Además esta propiedad tiene que ser conservada cuando el punto A queda fijo y Φ se transforma por medio de una substitución lineal arbitraria en las variables y_1, y_2. Ahora bien, elegimos inicialmente las coordenadas proyectivas y_1, y_2 de manera que en el punto B[1] resulte $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, de donde sigue $P = N = 0$. Entonces, imponiendo que la condición (9.2) sea conservada por la transformación particular:

$$y_1 = y_1' + a\,y_2', \quad y_2 = y'_2$$

donde a es una cantidad arbitraria, se concluye de inmediato que $M = L = H = 0$. Luego $\Phi = Ky_2^5$; y volviendo a un sistema arbitrario de coordenadas proyectivas y_1, y_2 sigue subsistiendo la circunstancias que Φ es la quinta potencia de una forma lineal.

Por consiguiente, si la hipótesis (9.2) no puede evitarse me-

(1) Que es necesariamente distinto del punto A porque $K \neq 0$.

diante un cambio de las coordenadas curvilíneas, esto significa que el primer miembro de la ecuación (1.5) es la quinta potencia de una forma diferencial lineal. Entonces la cuestión a que tenemos que contestar es: ¿existe alguna superficie cuyos cinco sistemas de líneas principales se reducen a un solo sistema contado cinco veces? Sin ocuparnos aquí de las superficies más generales que gozan de esta propiedad, para nosotros es suficiente observar que la existencia de superficies que se hallan en estas condiciones puede concluirse acudiendo a ejemplos particulares. Ahora bien, en una Memoria precedente (1) he determinado toda la clase de las superficies del espacio S_5 que poseen un sistema quíntuple de líneas principales *planas* (2).

10.—Estamos ahora en condición de contestar a la pregunta formulada en el problema A) por medio del siguiente teorema general:

Siendo dada arbitrariamente la ecuación diferencial de las curvas principales, siempre existen superficies que poseen esas curvas principales. Más precisamente, sea prefijada arbitrariamente la ecuación:

$$(10.1)\quad H du^5 + L du^4 dv + M du^3 dv^2 + N du^2 dv^3 + P du dv^4 + K dv^5 = 0,$$

donde:

$$(10.2)\qquad K \neq 0$$

y:

$$(10.3)\qquad 2P^2 - 5KN \neq 0\,.$$

Para obtener una superficie S *que no represente ninguna ecuación de Laplace, cuyas curvas principales son dadas por la ecuación diferencial* (10.1), *esto es, para obtener el sistema de ecuaciones fundamentales* (1.3) *de la superficie* S, *podemos dar arbitrariamente, además de la condición* $\mu = 0$ (*que concierne solamente al factor de proporcionalidad* ϑ *de las coordenadas homogéneas del punto que describe la superficie* S), *las funciones de la sola variable* v *a la cual tiene que reducirse cada una de las funciones:*

(1) A. Terracini: *Sui sistemi semplicemente infiniti di piani nello spazio a cinque dimensioni.* Atti delle Scienze di Torino, vol. 73, 1938.

(2) Ellas (si no representan ninguna ecuación de Laplace) se logran como lugares de las *"cónicas focales"* de los planos que pertenecen a una familia ∞^1 tal que dos planos consecutivos siempre se corten en un mismo punto según un orden de aproximación $\sigma \geq 6$.

$$\gamma,\ \delta,\ \delta_u,\ \varepsilon,\ \varepsilon_u,\ \eta,\ \eta_u,\ \lambda,\ \lambda_u,\ \sigma,\ \sigma_u,\ \sigma_{uu}$$

para un valor inicial $u = u_0$ (1), *Mediante estas condiciones iniciales todas las funciones que aparecen como coeficientes en el sistema de ecuaciones fundamentales* (1.3) *quedan unívocamente determinadas.*

Si no se cumple una de las desigualdades (10.2) *o* (10.3), *podemos reducirnos al caso precedente mediante una transformación de las coordenadas curvilíneas* u, v, *excepto en el caso en que el primer miembro de la ecuación* (10.1) *se reduce idénticamente a cero o es la quinta potencia de una forma diferencial lineal. Pero en estos dos casos excepcionales la existencia de la superficie buscada queda asegurada ya por otros medios.*

11.—Hasta ahora nos ocupamos únicamente del problema *A*). Ahora tenemos que considerar de nuevo el problema *B*). Pero es claro que en general, a la pregunta formulada en este problema tenemos que contestar negativamente, porque, de otra manera, sería necesario que el precedente sistema (Σ) —en el cual todavía podemos suponer $\mu = 0$— admitiera una solución donde la función incógnita σ fuera una función arbitraria de las dos variables *u, v*. Por lo contrario, la solución de este sistema depende únicamente de las funciones arbitrarias de la sola variable *v* que han sido indicadas en el n.10.

12.—Volviendo al problema *A*), la forma de la cual hemos formulado su resolución lleva a la conclusión que, dada una superficie cualquiera en el espacio S_5, siempre existen muchas otras superficies *S'* que pueden representarse sobre *S* de manera que se correspondan todos los sistemas de líneas principales. De aquí sigue la observación hecha al fin de la introducción de esta Memoria. Sin ocuparnos ahora de desarrollar ulteriormente este asunto, nos limitamos a dar el ejemplo siguiente de una tal representación, donde las superficies *S* y *S'* pertenecen a tipos completamente distintos. Es bien sabido(2) que si la superficie *S* repre-

(1) El prefijar la función de la variable v a la cual tiene que reducirse γ para $u=u_0$ tiene como consecuencia (junto con la condición $u=0$) fijar el factor de las coordenadas homogéneas, como se ve observando la fórmula (4.1) y las demás fórmulas contenidas en la nota del n. 4.

(1) CORRADO SEGRE: *Le linee principali di una superficie di* S_5 *e una proprietà caratteristica della superficie di Veronese,* Nota I, Ren. della R. Acc. dei Lincei, (5), vol. XXX, 1921.

senta una ecuación de LAPLACE no parabólica, dos de sus sistemas de líneas principales son dados por las características, mientras que los tres sistemas restantes son envueltos sobre la superficie por una terna bien determinada de tangentes cuya Hessiana coincide con el par de tangentes a las características. Ahora bien, si partimos de una tal superficie S y formamos la ecuación diferencial de sus curvas principales, podemos adoptar esta ecuación como ecuación (10.1) y así, según nuestro teorema general, logramos varias superficies S' que no representan ninguna ecuación de LAPLACE. Como es claro, cada una de ellas corresponde a la superficie S con conservación de los cinco sistemas de líneas principales, aunque las estructuras proyectivas de S y S' son tan profundamente distintas entre sí, que S representa una ecuación de Laplace, y S' ninguna.

Alejandro Terracini

Tucumán, 25 de Junio de 1940.