AUREL WINTNER

On the iteration of distribution functions in the calculus of probability

Sobre la iteración de funciones de distribución en el cálculo de probabilidades

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 18

BUENOS AIRES
1941

ON THE ITERATION OF DISTRIBUTION FUNCTIONS IN THE CALCULUS OF PROBABILITY

by AUREL WINTNER
(Baltimore, Maryland, U. S. A.)

Starting with a distribution function $\phi(x)$, $-\infty < x < +\infty$, define a sequence of distribution functions $\phi_1(x) = \phi(x)$, $\phi_2(x), \dots$ by placing $\phi_n(x) = \phi^n(n^{1/2}x)$, where $\phi^n(x)$ denotes the distribution function which is recursively defined as the convolution of $\phi^{n-1}(x)$ and $\phi^1(x) = \phi(x)$. It is understood that by a distribution function $\phi(x)$ is meant a monotone function satisfying the boundary conditions $\phi(-\infty) = 0$, $\phi(+\infty) = 1$, and that the convolution of two distributions functions $\phi_{I}(x)$, $\phi_{II}(x)$ is the distribution function whose Fourier-Stieltjes transform L is the product of $L(u; \phi_{I})$ and $L(u; \phi_{II})$, where

$$(1) \qquad L(u;\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux)\, d\phi(x); \qquad -\infty < u < +\infty.$$

Thus, the sequence $\{\phi_n(x)\}$ belonging to a given $\phi(x)$ may also be defined by

$$(2) \qquad L(u; \phi_n) = (L(n^{-1/2}\ u; \phi))^n.$$

The distribution functions $\phi_n(x)$ belonging to a given $\phi(x)$ form the sequence which occurs in a fundamental limit theorem in calculus of probability. In fact, this theorem (1) implies that if ϕ has a finite second moment

$$(3) \qquad \mu_2(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, d\phi(x),$$

then, as $n \to +\infty$, the distribution function $\phi_n(x)$ either tends

(1) Cf. P. LÉVY, Bull. Soc. Math. de France, vol. 52 (1924), pp. 49-68.

to a symmetric normal distribution function or to no limit distribution function at all; the alternative being decided by whether or not the first moment

$$\mu_1(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, d\phi(x) \tag{4}$$

vanishes. In the first case, the numerical value of the precision of the limiting distribution (which then is normal and symmetric) is known to be determined by the standard deviation of ϕ, i. e., by the non-negative square root of the number

$$\delta(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_1(\phi))^2 \, d\phi(x).$$

It is understood that $\delta(\phi) = 0$ only when $\phi(x) = 1/2 + 1/2 \operatorname{sgn}(x - c)$ for some $c = \text{const.}$, in which case (4) vanishes if and only if $c = 0$. Correspondingly, the Dirac distribution function $1/2 + 1/2 \operatorname{sgn} x$ must be considered as representing a (symmetric) normal distribution of infinitely high precision.

This enumeration of all possibilities as to the behavior of the sequence $\{\phi_n(x)\}$ for $n \to +\infty$ assumes that the probability distribution represented by the initial distribution funcion $\phi(x)$ is dispersed only in such a way that the second moment (3) is finite. The literature of the subject does not seem to contain a corresponding general treatment of the remaining case (2), where $\mu_2(\phi) = +\infty$. The object of the present note is to deal with this singular case. The result may roughly be described by saying that, if $\mu_2(\phi) = +\infty$, the behavior of the distribution function $\phi_n(x)$ for large n is such as to correspond to a (normal) distribution of infinitely low precision.

In order to formulate the result in a precise form, let a sequence of distribution functions $\beta^{(1)}(x), \ldots, \beta^{(n)}(x), \ldots$ be called *flat* if the probability distribution represented by $\beta^{(n)}(x)$ is swept into infinity as $n \to +\infty$, i. e., if there exists for every $\varepsilon > 0$ and every $R > 0$ an $N = N(\varepsilon, R)$ in such a way that

(2) M. Kac and A. Khintchine have considered this case under the assumption that the first moment (4) exists as an absolutely convergent integral; cf. Comptes Rendus, vol. 202 (1936), pp. 1963-1965.

the total variation of the monotone function $\beta^{(n)}(x)$ on the interval $-R<x<R$ is less than ε for every $n>N$. In order that such be the case, it is sufficient, though not necessary, that

$$(5) \qquad L(u; \beta^{(n)}) \to 0 \text{ for every } u \neq 0, \text{ as } n \to +\infty.$$

That (5) is not a necessary condition, is illustrated by the flat sequence which is defined by $\beta^{(n)}(x) = 1/_2 + 1/_2 \operatorname{sgn}(x-n)$, since for this sequence $|L(u; \beta^{(n)})| \equiv 1$, by (1). On the other hand, a known proof of the continuity theorem of Fourier-Stieltjes transforms [3], when adapted in an obvious manner to the case at hand, makes it evident that (5) is a sufficient condition for the flatness of $\{\beta^{(n)}(x)\}$.

The theorem to be proved states that $\{\Phi_n(x)\}$ is a flat sequence whenever $\mu^2(\Phi) = +\infty$. Consequently, if $\mu^2(\Phi) = +\infty$, then, as $n \to +\infty$, the distribution function $\Phi_n(x)$ either does not tend to a limit function, or, if it does, $\lim \Phi_n(x)$ is a constant, instead of being a distribution function.

According to (5) and (2), it will be sufficient to show that if $\mu^2(\Phi) = +\infty$, then

$$(6) \qquad (L(n^{-1/2} u; \Phi))^n \to 0 \text{ for every } u \neq 0, \text{ as } n \to +\infty.$$

For a given distribution function $\Phi(x)$, for which $\mu_2(\Phi) = +\infty$ may but need not hold, let $\overline{\Phi}(x)$ denote the distribution function $1 - \Phi(-x)$. Thus, (1) shows that $L(u; \Phi)$ and $L(u; \overline{\Phi})$ are complex conjugate for every u. Accordingly, if $\Phi'(x)$ denotes the convolution of $\Phi(x)$ and $\overline{\Phi}(x)$, then $L(u; \Phi') = |L(u; \Phi)|^2$. Hence, the assertion (6) is equivalent to the relation which one obtains by writing Φ' for Φ in (6). On the other hand, (3) shows that $\mu_2(\Phi) = \mu_2(\overline{\Phi})$. It follows, therefore, from standard relations for the momenta of convolutions [4], that also the assumption $\mu_2(\Phi) = +\infty$ of (6) remains uchanged if one writes Φ' for Φ. But $L(u; \Phi') = |L(u; \Phi)|^2$ is real; so that, on writing Φ for Φ', one has

(3) Cf. E. K. HAVILAND, Amer. Journ. of Math., vol. 57 (1935), pp. 382-388.

(4) Cf. B. JESSEN and A. WINTNER, Trans. of. Amer. Math. Soc., vol. 38 (1935), pp. 54-55.

$$(7) \qquad L(u; \Phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ux)\, d\Phi(x),$$

by (1). Consequently, it is sufficient to prove that the assumption $\mu_2(\Phi) = +\infty$ implies the assertion (6) in the particular case (7).

Since $\Phi(x)$ is a distribution function, (7) implies that

$$L(u; \Phi) - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos ux - 1)\, d\Phi(x) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(\tfrac{1}{2} ux)\, d\Phi(x).$$

Hence, the assertion (6) may be written in the form

$$(8) \qquad (1 - 2c_n/n)^n \to 0, \qquad (n \to +\infty),$$

where $c_n = c_n(u)$ denotes, for every fixed $u \neq 0$, the number

$$(9) \qquad c_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(n^{-1/2}\, ux)\, d\Phi(x).$$

But (8) is certainly true if $c_n \to +\infty$ as $n \to +\infty$. Hence, it is sufficient to show that if $\mu_2(\Phi) = +\infty$, then the expression (9) tends with n to $+\infty$ for every fixed $u \neq 0$.

Now, if $R > 0$ is arbitrary, then

$$c_n \geqq n \int_{-R}^{R} \sin^2(n^{-1/2}\, ux)\, d\Phi(x).$$

Hence,

$$\liminf_{n \to +\infty} c_n \geqq u^2 \int_{-R}^{R} x^2\, d\Phi(x); \text{ while } \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} x^2\, d\Phi(x) = \mu_2(\Phi),$$

by (3). Since $u \neq 0$ and $\mu_2(\Phi) = +\infty$, it follows that $c_n \to +\infty$ as $n \to +\infty$; so that the proof es complete.

There arises the question whether in the flat case the n th distribution function must tend to a constant as $n \to \infty$, or that it is possible that the n^{th} distribution function flattens out in such a way as to tend to no limiting position. The discussion of this question seems to require more detailed considerations (5) than the summary Fourier analysis applied above. In addition one can ask whether, in case the constant limit exists, the constant can or cannot have a value distinct from one of the three values 0, $1/2$, 1, which are trivially possible.

The Johns Hopkins University.

(5) E. R. van Kampen and Aurel Wintner, American Journal of Mathematics, vol. 50 (1937), pp. 635-654.

SOBRE LA ITERACION DE FUNCIONES DE DISTRIBUCION EN EL CALCULO DE PROBABILIDADES

por AUREL WINTNER
(Baltimore, Maryland, U. S. A.)

Partiendo de una función de distribución $\phi(x), -\infty < x < +\infty$, se puede definir una sucesión de funciones de distribución $\phi_1(x) = \phi(x)$, $\phi_2(x)$, ... poniendo $\phi_n(x) = \phi^n(n^{1/2}x)$, donde $\phi^n(x)$ indica la función de distribución definida por recurrencia como la convolución (en alemán «faltung») de $\phi^{n-1}(x)$ y $\phi^1(x) = \phi(x)$. Por función de distribución $\phi(x)$ se entiende una función monótona que satisface las condiciones límites $\phi(-\infty) = 0$, $\phi(+\infty) = 1$ y por convolución de dos funciones de distribución $\phi_I(x)$, $\phi_{II}(x)$ indicamos la función de distribución cuya transformada L de Fourier-Stieltjes es el producto de $L(u; \phi_I)$ y $L(u; \phi_{II})$, siendo

$$(1) \qquad L(u; \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(iux)\, d\phi(x) \quad ; \qquad -\infty < u < +\infty$$

Por tanto, la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ perteneciente a una $\phi(x)$ dada puede ser definida por

$$(2) \qquad L(u; \phi_n) = (L(n^{-1/2} \cdot u; \phi))^n$$

Las funciones de distribución $\phi_n(x)$ pertenecientes a una $\phi(x)$ dada forman la sucesión que aparece en un teorema límite fundamental del cálculo de probabilidades. En efecto, este teorema (¹) implica que si $\phi(x)$ tiene un momento segundo finito

$$(3) \qquad \mu_2(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, d\phi(x),$$

entonces, para $n \to \infty$, las funciones de distribución $\phi_n(x)$ o bien tienden a una función de distribución normal y simétrica o bien no tienden a ninguna función de distribución; la alternativa se decide según que sea nulo o no el primer momento

$$(4) \qquad \mu_1(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, d\phi(x)$$

(¹) P. LÉVY, Bull. Soc. Math. de France, vol. 52 (1924), pág. 49-68.

En el primer caso, el valor numérico de la precisión de la distribución límite (la cual es entonces normal y simétrica) se sabe que está determinado por la desviación tipo de ϕ, es decir, por la raíz cuadrada no negativa del número

$$\delta(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - \mu_1(\phi)]^2 \, d\phi(x)$$

Evidentemente que $\delta(\phi) = 0$ solamente cuando $\phi(x) = {}^1/_2 + {}^1/_2 \operatorname{sgn}(x - c)$ para alguna $c =$ constante, en cuyo caso (4) se anula cuando y solamente cuando $c = 0$. Análogamente, la función de distribución de Dirac ${}^1/_2 + {}^1/_2 \operatorname{sgn} x$ puede ser considerada como representación de una distribuciónn normal y simétrica de precisión infinitamente elevada.

Esta enumeración de todas las posibilidades sobre el comportamiento de la sucesión $\{\phi_n(x)\}$ para $n \to \infty$ lleva consigo que la distribución de probabilidad representada por la función de distribución inicial $\phi(x)$ es dispersa solo en el caso en que el segundo momento (3) es finito. La literatura sobre esta cuestión no parece contener un tratamiento general análogo del caso restante ([2]), cuando $\mu_2(\phi) = +\infty$.

El objeto de la presente nota es estudiar este caso singular. El resultado puede ser enunciado groseramente diciendo que, si $\mu_2(\phi) = +\infty$, el comportamiento de la función de distribución $\phi_n(x)$ para grandes *n* es el que corresponde a una distribución normal de precisión infinitamente baja.

Para formular este resultado en una forma precisa, llamemos *lisa* a una sucesión de funciones de distribución $\beta^{(1)}(x)$, $\beta^{(2)}(x), \ldots,$ $\beta^{(n)}(x), \ldots,$ tal que la distribución de probabilidad representada por $\beta^{(n)}(x)$ es barrida al infinito para $n \to \infty$, es decir, si existe para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $R > 0$ un $N = N(\varepsilon, R)$ tal que la variación total de la función monótona $\beta^{(n)}(x)$ en el intervalo $-R < x < R$ sea menor que ε para cada $n > N$. Para que esto suceda es suficiente, aunque no necesario que

(5) $\quad L(u; \beta^{(n)}) \to 0$ para cada $u \neq 0$, cuando $n \to +\infty$.

Que (5) no es condición necesaria se comprueba considerando la sucesión lisa definida por $\beta^{(n)}(x) = {}^1/_2 + {}^1/_2 \operatorname{sgn}(x - n)$, puesto que según (1) para esta función es $|L(u; \beta^{(n)})| \equiv 1$. Por otra parte, una conocida demostración del teorema de continuidad de la transformada de Stieltjes-Fourier ([3]), adaptada a este caso particular dá

([2]) M. Kac y A. Khintchine han considerado este caso bajo la hipótesis de que el primer momento (4) existe y es una integral absolutamente convergente. Comptes Rendus, vol. 202 (1936) pág. 1963-1965.

([3]) E. K. Haviland, Amer. Journ. of Math., vol. 57 (1935), pág. 382-388.

de manera inmediáta que (5) es una condición suficiente para que $\{ \beta^{(n)}(x) \}$ sea lisa.

El teorema que queremos demostrar prueba que $\{ \phi_n(x) \}$ es una sucesión lisa siempre que $\mu_2(\phi) = +\infty$. En consecuencia si $\mu_2(\phi) = +\infty$, para $n \to \infty$ la función de distribución $\phi_n(x)$ o bien no debe tender a ninguna función límite o bien el $\lim \phi_n(x)$ es una constante en lugar de ser una función de distribución.

Teniendo en cuenta (5) y (7) será suficiente probar que si $\mu_2 = +\infty$, entonces

$$(6) \qquad (L(n^{-1/2}u;\phi))^n \to 0 \text{ para todo } u \neq 0, \text{ cuando } n \to +\infty.$$

Para una función de distribución dada $\phi(x)$ para la cual puede o no verificarse que $\mu_2(\phi) = \infty$, representaremos por $\overline{\phi}(x)$ la función de distribución $1 - \phi(x)$. Así (1) prueba que $L(u;\phi)$ y $L(u;\overline{\phi})$ son complejos conjugados para cada u. Según esto, si $\phi(x)$ indica la convolución de $\phi(x)$ y $\overline{\phi}(x)$, entonces $L(u;\phi') = |L(u;\phi)|^2$. Por tanto la condición (6) es equivalente a la relación que se obtiene escribiendo ϕ' en lugar de ϕ en (6). Por otra parte (3) prueba que $\mu_2(\phi) = \mu_2(\overline{\phi})$. En consecuencia, por relaciones conocidas entre los momentos de las convoluciones (4) se ve que también la hipótesis $\mu_2(\phi) = +\infty$ de (6) subsiste si se escribe ϕ' en lugar de ϕ. Pero $L(u;\phi') = |L(u;\phi)|^2$ es real, de manera que escribiendo ϕ en lugar de ϕ', se tiene, por (1):

$$(7) \qquad L(u;\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(ux)\, d\phi(x)$$

En consecuencia es suficiente demostrar que la hipótesis $\mu_2(\phi) = +\infty$ implica la afirmación (6) en el caso particular (7).

Puesto que $\phi(x)$ es una función de distribución, (7) implica que

$$L(u;\phi) - 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos ux - 1)\, d\phi(x) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}^2(\tfrac{1}{2}ux)\, d\phi(x).$$

De aquí, que la igualdad (6) puede ser escrita en la forma

$$(8) \qquad \left(1 - 2\frac{c_n}{n}\right)^n \to 0, \qquad (n \to +\infty)$$

donde $c_n = c_n(u)$ indica para cada valor fijo de $u \neq 0$, el número

(4) B. JESSEN y A. WINTNER, Trans. of Amer. Math. Soc. vol. 38 (1935, págs. 54-55.

$$c_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}^2 (n^{-1/2}\, u\, x)\, d\phi(x). \tag{9}$$

Pero (8) es seguramente cierto si $c_n \longrightarrow \infty$ para $n \longrightarrow +\infty$. De aquí que sea suficiente probar que si $\mu_2(\phi) = +\infty$, entonces la expresión (9) tiende a infinito con n para cada valor fijo de $u \neq 0$.

Ahora bien, si $R > 0$ es arbitrario, entonces

$$c_n \geqq n \int_{-R}^{+R} \operatorname{sen}^2 (n^{-1/2}\, u\, x)\, d\phi(x).$$

De aquí, por (3)

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} c_n \geqq u^2 \int_{-R}^{+R} x^2\, d\phi(x); \quad \text{pues} \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_{-R}^{R} x^2\, d\phi(x) = \mu_2(\phi).$$

Puesto que $u \neq 0$ y $\mu_2(\phi) = +\infty$ se deduce que $c_n \longrightarrow +\infty$ para $n \longrightarrow +\infty$, con lo cual la demostración está terminada.

Queda en pie la cuestión de si para sucesión lisa la n^a funcion de distribución debe tender a una constante para $n \longrightarrow \infty$, o bien si es posible que la n^a función de distribución se haga lisa de tal manera que no tienda a ninguna posición límite. El estudio de esta cuestión parece requerir consideraciones más precisas (5) que el simple análisis de Fourier aplicado anteriormente.

Por último se puede preguntar si en el caso que exista la constante límite, ésta puede o no tener un valor distinto de los tres valores 0, $^1/_2$, 1, los cuales son evidentemente posibles.

The Johns Hopkins University.

(Original recibido en Enero de 1940).

(5) E. R. van Kampen y Aurel Wintner, American Journal of Mathematics, vol. 59 (1937), págs. 635-654.