ESTHER FERRARI

SOBRE LA PARADOJA DE BERTRAND

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 19

BUENOS AIRES
1941

SOBRE LA PARADOJA DE BERTRAND

por ESTHER FERRARI

Muy conocido es el siguiente problema de Bertrand:

«On trace au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour qu'elle soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit?».

Teniendo en cuenta que si un triángulo equilátero está inscripto en una circunferencia de radio R, la distancia de sus lados al centro es $R/2$; el problema se puede enunciar así:

Dados dos círculos concéntricos de radios R y $R/2$, si se traza al azar una cuerda en el círculo de radio R ¿cuál es la probabilidad de que la cuerda corte también al otro círculo?

Bertrand dá tres soluciones de este problema, que conducen a tres resultados diferentes, expuestos en casi todos los tratados de probabilidades. La cuestión parecía agotada, pero no hace mucho apareció en la revista de la Academia de Ciencias de Estocolmo una memoria de prestigioso autor (1), cuyas conclusiones son muy discutibles. La crítica de este trabajo y el claro planteamiento del problema constituyen el objeto de este trabajo de seminario, realizado como alumna del Instituto Matemático de la Universidad de Buenos Aires.

Como Bertrand utiliza ciertos principios de simetría que ocultan el concepto, vamos a puntualizar la esencia de su razonamiento, poniendo de manifiesto el significado de probabilidad que es el de *medida* de un conjunto parcial de elementos, respecto de un conjunto total. La medida es, como se sabe, una función aditiva de conjunto, no siendo necesario en este problema postular la aditividad infinita. Según sea el sistema de coordenadas adoptado será distinta la expresión de la medida, la cual tiene, como se sabe (2), la forma

$$\int_A f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

donde $f(\xi, \eta)$ es una función positiva arbitraria.

(1) HENRIK PETRINI, Le paradoxe de Bertrand. Arkiv for matematik, astronomi och fysik. Band 25 A. N° 16. 1936.

(2) H. POINCARÉ. Calcul des probabilités, 2ª edición, pág. 120.

Refiriéndose a la indeterminación originada por esta función arbitraria dice Deltheil: «Para una clase extensa de problemas esta indeterminación desaparece imponiendo la condición siguiente: el resultado del cálculo debe ser invariante para un desplazamiento de conjunto de la figura. Este punto de vista liga las probabilidades geométricas a la *teoría de la medida* de los conjuntos.

Consideremos el círculo de radio $R = 1$ y la cuerda AB:

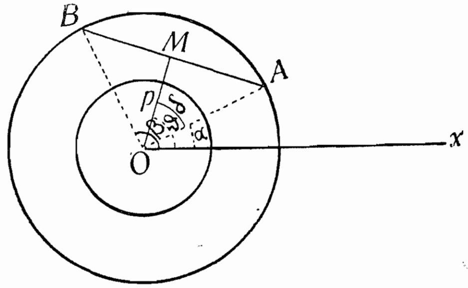

Fig. 1

1.ª Solución: Dice Bertrand [3]:

''Si l'une des extrémités de la corde est connue, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence, favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandée.

L'une des extremités de la corde étant connue, la direction doit être réglée par le hasard. Si l'on trace les deux côtés du triangle équilatéral ayant pour sommet le point donné, ils forment entre eux et avec la tangente trois angles de 60º.

La corde pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, doit se trouver dans celui des trois angles qui est compris entre les deux autres. La probabilité pour que le hasard entre trois angles égaux qui peuvent le recevoir le dirige dans celui-là semble par définition égale 1/3''.

Este razonamiento de Bertrand equivale a esto:

Como coordenadas de la cuerda se toman los ángulos polares α y β; y se toma como probabilidad elemental $d\alpha . d\beta$. El párrafo transcrito, traducido en el lenguaje del cálculo integral, equivale a esto: El punto A puede encontrarse en cualquier punto de la circunferencia. Luego α puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y 2π.

Fijo A, si AB es el lado del triángulo equilátero inscripto $\beta = \alpha + 120^\circ$

[3] J. Bertrand. *Calcul des Probabilités.* Paris, 1889; pág. 4.

La probabilidad P de las cuerdas mayores que el lado del triángulo equilátero inscripto, es por consiguiente:

$$P = \frac{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\beta}{\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta} = \frac{1}{3}$$

2.ª Solución. — Dice Bertrand:

"Si l'on connaît la direction de la corde, ce renseignement ne change pas la probabilité; la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence favorable ou défavorable a l'arrivée de l'événement demandé.

La direction de la corde étant donnée, elle doit, pour être plus grande que le côté du triangle équilatéral, couper l'un ou l'autre des rayons qui composent le diamètre perpendiculaire, dans la moitié la plus voisine du centre. La probabilité pour qu'il en soit ainsi semble, par définition égale à ½".

Este breve razonamiento equivale a esto:

Como coordenadas de la cuerda tomamos las de la recta, o sea la distancia p $(0 \leq p \leq 1)$ y el ángulo Θ $(0 \leq \Theta \leq 2\pi)$, y como probabilidad elemental se adopta $dp\, d\Theta$.

Si $\overline{OM}$ está comprendido entre 0 y 1/2, la cuerda es mayor que el lado del triángulo equilátero inscripto, luego

$$P = \frac{\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{1/2} dp}{\int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^{1} dp} = \frac{1}{2}$$

Hemos procurado interpretar rigurosamente los dos razonamientos de Bertrand, dando expresión analítica a la idea intuitiva encerrada en la frase repetida en ambos: «la symétrie du cercle ne permet d'y attacher aucune influence favorable ou défavorable à l'arrivée de l'événement demandé». Esta frase tiene el siguiente significado analítico: la simetría del círculo reduce el cálculo de la probabilidad de un conjunto definido por dos variables a la de un conjunto definido por una sola variable. El significado estricto de tal razonamiento para todos los casos análogos es éste: *Si al fijar una variable resulta constante la medida del conjunto simplemente infinito así definido, la probabilidad buscada es la misma de este conjunto.* En efecto, la segunda integración equivale en tal caso a multiplicar numerador y denominador por un mismo factor constante y esto no modifica el cociente. En las dos soluciones de Bertrand es aplicable este criterio, pues la primera integral resulta constante en ambos casos y la segunda integración alrededor de la circunferencia equivale, por tanto, a multiplicar numerador y denominador por el factor 2π.

3.ª Solución. — El razonamiento de Bertrand es éste:

''Choisir une corde au hasard, c'est en choisir au hasard le point milieu. Pour que la corde soit plus grande que le côté du triagle équilatéral, il faut et il suffit que le point milieu soit à une distance du centre plus petite que la moitié du rayon, c'est à diré â l'intérieur d' un cercle quatre fois plus petit en surface. Le nombre des points situés dans l'intérieur d'une surface quatre fois moindre est quatre fois moindre. La probabilité pour que la corde dont le milieu est choisi au hasard soit plus grande que le côté du triangle équilatéral semble par définition égale à ¼''.

Traducido en coordenadas equivale a esto: adoptamos como coordenadas, las de su punto medio: radio p y ángulo Θ. Con estas coordenadas adoptamos como medida de un conjunto de cuerdas cuyos puntos medios forman un recinto al área de éste. Por consiguiente la probabilidad elemental es el elemento de área: $p\,d\,p\,d\,\Theta$ y la probabilidad pedida es ésta:

$$P = \frac{\int_0^{1/2} p\,d\,p \int_0^{2\pi} d\,\Theta}{\int_0^{1} p\,d\,p \int_0^{2\pi} d\,\Theta} = \frac{1}{4}$$

Deltheil, en su libro sobre probabilidades geométricas, dice: «Si se pregunta cuál de las tres soluciones de Bertrand es la buena, la respuesta es que las tres son lógicas, pero que en realidad se refieren a tres problemas diferentes, o más exactamente a tres mecanismos diferentes de intervención del azar».

En el primer caso, el azar interviene en la dirección de la cuerda, en el segundo caso en la distancia de la cuerda al centro de la circunferencia y en el tercero en la posición del punto medio.

Justo es reconocer que el propio Bertrand se coloca en un punto de vista análogo cuando dice:

«Entre ces trois réponses; quelle est la véritable?

Aucune des trois n'est fausse, aucune n'est exacte, la question est mal posée».

Hemos llegado a las tres soluciones de Bertrand considerando casos particulares de las probabilidades elementales correspondientes. Ya hemos visto que en la expresión general de la probabilidad elemental aparece una función positiva arbitraria de las variables que se adoptan, la cual se determina mediante el grupo de transformaciones que se adopte como básico.

Es así que en el problema de Bertrand, el resultado $P = 1/2$ de la segunda solución se impone (como dice Deltheil) desde el punto de vista de la *medida de las rectas,* y la solución $P = 1/4$ está impuesta por el grupo de los movimientos de los puntos del plano, al sustituir cada cuerda por su punto medio.

En efecto, se ha llegado analíticamente a la 2.ª solución tomando como coordenadas de las cuerdas, las de sus rectas básicas que son invariantes respecto de los movimientos de dichas rectas (4); y a la tercera solución se ha llegado tomando las coordenadas de los puntos medios.

Ahora bien; siendo la cuerda un elemento geométrico distinto de la recta básica, se ve claramente por qué la segunda solución de Bertrand que Deltheil justifica desde el punto de vista de la recta, no debe considerarse como solución estricta del problema de Bertrand, tal como éste lo enunció. Note el lector que Bertrand habla de conjuntos de *cuerdas* y no de *rectas*. Dicha solución corresponde en realidad al siguiente problema: Dados dos círculos concéntricos de radios R y R/2, si se traza al azar una recta, entre todas las que cortan al círculo de radio R ¿cuál es la probabilidad del conjunto de rectas que también cortan al 2.º círculo?

Es muy cierto que cada cuerda está determinada por su recta base, de igual modo que está determinada por su punto medio y también puede determinarse de infinitos otros modos, pero el con-

(4) R. Deltheil, Probabilités géometriques, 1926, pág. 14.

cepto geométrico de medida, o sea de probabilidad, es independiente del concepto aritmético de correspondencia biunívoca.

En efecto, si se adopta el punto medio de cada cuerda como representante de ésta, figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de cuerdas, ni a conjuntos iguales de rectas. Así por ejemplo, los conjuntos de rectas que cortan a uno u otro de dos segmentos iguales son congruentes y por tanto tienen probabilidades iguales respecto del grupo de los movi-

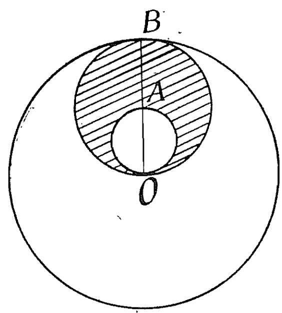

Fig. 2

mientos del plano. En cambio, los puntos medios de las cuerdas que determinan esas rectas forman conjuntos de área distinta. En la figura se han dibujado las superficies cubiertas por tales conjuntos de puntos medios de las cuerdas que cortan a los segmentos iguales OA y AB; y las áreas de esos recintos no son iguales, sino que una es triple de la otra, a pesar de que los correspondientes conjuntos de rectas son iguales.

Esto bastaría si no existiesen otras razones, para afirmar que la única solución aceptada por H. Petrini, que es la tercera de Bertrand, no es legítima.

Es preciso, pues, adoptar coordenadas especiales que no sean de punto ni de recta, sino de la cuerda. Sobre esto y el análisis de la memoria citada, versará nuestra nota próxima.

En la comunicación de H. Petrini a la Academia de Ciencias de Estocolmo, presentada el 22 de Enero de 1936 por T. Carleman y F. Carlson (*), se afirma que de las tres soluciones dadas por Bertrand la tercera (o sea el valor $\frac{1}{4}$) es la única que debe considerarse como exacta. Petrini modifica la definición clásica de probabilidad discreta para aplicarla a los problemas de probabilidad geométrica de este modo:

"*Modification.* — Dans le calcul de la probabilité géométrique on considère les points, les lignes et les surfaces comme des limites de grandeurs géométriques, qui ont une ou plusieurs dimensions de plus. Par exemple, s'il s'agit des points sur une surface, on s'imagine la surface partagée en un grand nombre fini d'éléments égals, chacun représentant un seul point. Une direction est représentée par un petit angle. De cette manière les cas favorables seront réduits en un nombre fini, et on peut appliquer la définition donnée pour la recherche d'une probabilité approximée. La vraie probabilité est définie comme la limite de cette probabilité approximée, lorsque les éléments considérés deviennent infinement petits. Cette méthode est le plus souvent acceptée, et nous l'emploierons dans la suite".

Esta modificación es legítima para conjuntos de puntos situados en una superficie, la cual se divide en elementos

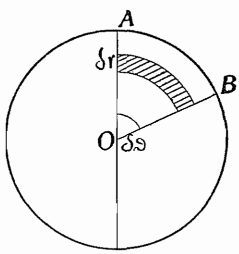

FIG. 1

iguales; pero cuando se trate de rectas, los elementos iguales ya no son trozos de superficie, sino conjuntos de rectas.

(*) Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. Band 25 A. Nº 16.

La primera parte de nuestro trabajo apareció en el Núm. 1 de este mismo vol. VII de la U. M. A.

Habiendo aceptado Petrini la solución prob $= \frac{1}{4}$ trata de hallar las faltas de la primera y de la segunda solución de Bertrand y dice así:

Première solution. — Maintenant nous chercherons la faute de la première solution. Soit le rayon OA du cercle donné partagé par portions δr, égales entre elles. Nous considérons le faisceau des cordes qui sont tirées perpendiculairement à OA, de manière qu'une corde passe par chaque élément δr. En passant à la limite $\delta r = 0$ on aura le faisceau complet qui est perpendiculaire à OA. Puis nous répéterons la même procédé pour un rayon OB, qui fait le petit angle $\delta\vartheta$ avec le rayon OA etc. pour tous les petits angles $\delta\vartheta$ et chaque fois nous trouverons la probabilité cherchée $= \frac{1}{2}$. En passant à la limite nous avons consideré toutes les directions de tous les faisceaux complets-et la probabilité reste toujours $= \frac{1}{2}$. C'est le sens dans lequel on aura à comprendre les mots ''pour des raisons de symétrie''.

Antes de seguir copiando, observemos que el sentido dado por Petrini a la frase clásica «por razones de simetría» no es en nuestra opinión correcto. En realidad, lo que según los autores clásicos de probabilidades expresaba este término (como ya hemos visto en la nota enterior) era esto:

Si es:

$$\text{prob} = \frac{\int_{c'} f(x,y)\,.\,dx\,.\,dy}{\int_{c} f(x,y)\,.\,dx\,.\,dy} = \frac{\int_0^a dx \int f\ (x,y)\,dy}{\int_0^a dx \int f\ (x,y)\,dy}$$

$\int f(x,y)\,dy$ para el conjunto de casos favorables es constante $= A$,
» » » » » » posibles » » $= B$,

la probabilidad es igual a $\frac{A}{B}$, prescindiendo de la segunda integración, ya que $\frac{A\,.\,a}{B\,.\,a} = \frac{A}{B}$.

Prosigue así el artículo que comentamos:

''Mais où est la faute de ce raisonnement? En passant du premier faisceau, qui est perpendiculaire au rayon OA, au second faisceau nous avons omis tous les faisceaux intermédiaires, qui consistent en cordes, dont le nombre est proportionnel à l'aire du secteur AOB, d'après ce que nous venons de démontrer à propos de la troisième solution. Le nombre des cordes omises est donc infiniment plus grand que celui des cordes retenues. Sous cettes circonstances il n'est pas surprenant, qu'en passant à la limite on ne trouvera pas le même résultat que si dès le début on avait considéré les cordes du secteur AOB.

Vemos aquí que cuando Petrini se propone contar las cuerdas, lo hace contando los puntos medios y no las rectas que determinan las cuerdas, como hace Bertrand en este caso. Esto no es correcto, pues ya hemos visto que figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de rectas.

Por último dice Petrini:

''La faute est précisément la même que si on avait voulu chercher le rapport des aires des deux cercles concentriques en raisonnant comme ça: ''pour des raisons de symétrie il suffit de considérer les éléments de surface, qui se trouvent le long du rayon OA, donc le rapport est $= \frac{1}{2}$''.

Ni Bertrand, ni ningún autor clásico, hubiera aplicado tal razonamiento puesto que en este caso la integral respecto de y para cada x es función de x, no constante.

Al tratar de hallar la falta de la segunda solución sigue Petrini utilizando los mismos conceptos; pero como figuras iguales consideradas como conjuntos de puntos no corresponden a conjuntos iguales de cuerdas, según hemos visto repetidas veces, y él sustituye las cuerdas por sus puntos medios, no es extraño que también en este caso Petrini llegue a una conclusión diferente a la que llegó Bertrand. Aun a riesgo de incurrir en excesivas repeticiones, y en vista de la insistencia de Petrini en adoptar el punto medio como representante de la cuerda, como si éste fuera el único modo posible, observemos que éste es solamente uno de los infinitos modos que se pueden elegir.

En efecto, otra forma y más natural, sería determinar la cuerda por su polo. Evidentemente a conjuntos iguales de cuerdas corresponden conjuntos iguales de polos, pero no recíprocamente. Lo mismo exactamente que sucede cuando se adopta el punto medio.

Por ej. si consideramos sobre la prolongación de un radio OA los segmentos iguales AB y BC, los conjuntos de cuerdas que tienen sus polos sobre AB y BC no son congruentes, ni tampoco lo son los conjuntos de rectas correspondientes; es lógico pues que al adoptar como medida del primer conjunto la del segundo resulten probabilidades distintas.

Como el conjunto de polos correspondientes a las cuerdas menores que $\sqrt{3}$ R es la corona de radios R y 2R cuya área es $3\pi R^2$ y la medida del conjunto de polos correspondientes a todas las cuerdas de la circunferencia es infinita, resulta aplicando estos resultados al problema de Bertrand, que la probabilidad de los casos desfavorables es igual a cero.

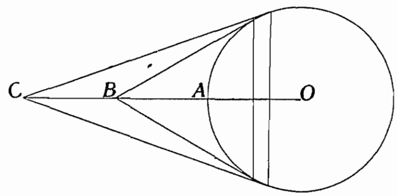

FIG. 2

Por consiguiente la solución del problema de Bertrand sería: prob $= 1$.

Pasemos ahora a dar la interpretación que creemos justa del problema de Bertrand. Puesto que el conjunto de elementos considerados está formado por cuerdas de la circunferencia y no por rectas del plano, y teniendo en cuenta las conclusiones anteriores, será preciso:

1.º — Adoptar coordenadas de cuerdas.

2.º — Determinar la densidad correspondiente a cada sistema de coordenadas por la condición de invariación respecto del grupo de movimientos que transforma una circunferencia en sí misma, es decir, del grupo de rotaciones alrededor de su centro.

Como coordenadas de las cuerdas podemos adoptar entre otras muchas, las siguientes:

a) Los argumentos α y β de sus extremos.

b) El argumento del origen y el arco positivo subtendido por la cuerda.

c) El arco subtendido por la cuerda y la dirección y sentido de esta que vienen determinados por el argumento del vector de origen 0 perpendicular a la cuerda y dirigida hacia ella.

d) El origen y la longitud de la cuerda.

e) La inclinación de la cuerda.

f) La longitud de la cuerda y su dirección (dada como en c).

Sistema de coordenadas (*a*). — La probabilidad elemental será del tipo $\iint f(\alpha, \beta) \,.\, d\alpha \,.\, d\beta$. Si se efectúa una rotación los nuevos argumentos son: $\alpha' = \alpha + h$, $\beta' = \beta + h$. Será $\iint f(\alpha, \beta) \,.\, d\alpha \,.\, d\beta = \iint f(\alpha', \beta') \,.\, d\alpha' \,.\, d\beta'$ si para todo par de valores se cumple la condición:

$$f(\alpha', \beta') = f(\alpha, \beta) \frac{\delta(\alpha, \beta)}{\delta(\alpha', \beta')}$$

Como es: $\frac{\delta(\alpha, \beta)}{\delta(\alpha, \beta')} = 1$ debe ser: $f(\alpha, \beta) = f(\alpha', \beta')$

Resulta pues que para todos los pares de valores $\alpha' = \alpha + h$, $\beta' = \beta + h$, es decir de diferencia $\beta' - \alpha' = \beta - \alpha$ toma f igual valor, luego esta sólo depende de la diferencia $\beta - \alpha$, es decir es función de $\beta - \alpha$.

$$f(\alpha, \beta) = \varphi(\beta - \alpha)$$

El caso más sencillo se tendrá cuando sea $\varphi = \text{Cte}$.

Ya se calculó ese caso y dió como resultado prob. $= \frac{1}{3}$, que es la primera solución de Bertrand.

Sistemas de coordenadas b, c, d, e, f. — Si consideramos por ej. el sistema d) resulta:

$$\iint F(\alpha, l) \,.\, d\alpha \,.\, dl = \iint F\left(\alpha, 2 \operatorname{sen} \frac{\beta - \alpha}{2}\right) . \, d\alpha \,.\, \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \,.\, d(\beta - \alpha)$$

En general, cualquiera que sea la segunda coordenada x, función del arco (casos b, c, d, e, f) la probabilidad elemental será del tipo:

$$\iint f(\alpha_1, x) \,.\, d\alpha_1 \,.\, dx \;; \qquad \beta - \alpha = x$$

Si se efectúa una rotación resulta: $\alpha'_1 = \alpha_1 + h$, $\quad x' = x$

Si para todo par de valores se cumple la condición:

$$f(\alpha_1, x) = f(\alpha' x') \frac{\delta(\alpha_1, x)}{\delta(\alpha'_1, x')}$$

Como es: $\frac{\delta(\alpha_1, x)}{\delta(\alpha'_1, x')} = 1$ debe ser: $f(\alpha_1, x) = f(\alpha'_1, x')$

Luego f debe ser sólo función de x, puesto que no varía al aumentar a_1. Por tanto: $f(\alpha_1, x) = \varphi(x)$.

Como para el conjunto de casos favorables y posibles los límites de integración son iguales, la probabilidad puede expresarse por un cociente de integrales simples, ya que fijado el origen la integración respecto de la otra coordenada es independiente de aquél, siendo por tanto aplicable el principio de simetría que hemos explicado anteriormente:

$$\text{prob.} = \frac{\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \varphi(x)\,.\,dx}{\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,.\,dx}$$

y llamando: $\Phi(x) = \int \varphi(x)\,dx$ resulta:

$$\text{prob.} = \frac{\Phi\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \Phi(0)}{\Phi(2\pi) - \Phi(0)}$$

Siendo Φ una función arbitraria, el problema de Bertrand no tiene solución única.

Cualesquiera que sean las coordenadas adoptadas, la solución más sencilla se obtiene adoptando densidad constante, pero entonces los resultados numéricos dependerán de las coordenadas adoptadas. Así, por ej.: Si se adoptan los sistemas de coordenadas a), b), c), resulta prob $= \frac{1}{3}$; en cambio si adoptamos los sistemas d), e), f) resulta prob $= 0{,}134$.

Deltheil en su libro sobre probabilidades geométricas (*) trata el problema de la determinación de la probabilidad elemental utilizando la teoría de los grupos continuos de transfor-

(*) *Loc. cit.*, pág. 16. Véase también el curso de REY PASTOR sobre ***Probabilidades abstractas***.

maciones. El problema de Bertrand corresponde a la categoría de los denominados por Deltheil «cas d'insuffisance», es decir, los casos en que las dos condiciones de la medida (igualdad para conjuntos congruentes y aditividad) dejan subsistir una función arbitraria de una variable, por ser el grupo de movimientos simplemente infinito, mientras que el conjunto de entes considerados es doblemente infinito. Tal acontece como vemos en el problema de Bertrand.

Cabe aún el caso en que las dos condiciones de la medida no solamente no determinan ésta, sino que ni siquiera restringen la indeterminación, como acontece en el caso anterior. Tal sucedería si el problema de las cuerdas lo trasladamos a las cónicas, considerando las cuerdas de una cónica que son secantes de otra cónica interior. La función arbitraria tiene en este caso dos variables independientes.

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires