

JOSÉ BABINI

Sobre algunas propiedades de las derivadas
y ciertas primitivas de los
polinomios de Legendre

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Publicación N.º 20

SANTA FE

1941



SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS Y CIERTAS PRIMITIVAS DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

por JOSÉ BABINI

1. Relación de simetría. —

Si con D_n^s indicamos las derivadas de orden s de $\frac{(x^2-1)^n}{2^n n!}$ (n natural), tendremos, incrementando por Taylor y directamente:

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{2n} \frac{h^s}{s!} D_n^s &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (x^2 - 1)^{n-r} h^r (2x + h)^r \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{r=0}^n \sum_{m=0}^r \binom{n}{r} \binom{r}{m} (x^2 - 1)^{n-r} h^{r+m} (2x)^{r-m} \end{aligned}$$

de donde

$$s \leq n; \quad \frac{D_n^s}{s!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geq \frac{s}{2}}^s \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2 - 1)^{n-r} (2x)^{2r-s}$$

$$s \geq n; \quad \frac{D_n^s}{s!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geq \frac{s}{2}}^n \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2 - 1)^{n-r} (2x)^{2r-s}$$

Si, en esta última fórmula, se cambia s por $2n - s$ y r por $n - s + r$

$$s \leq n; \quad \frac{D_n^{2n-s}}{(2n-s)!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geq \frac{s}{2}}^s \binom{n}{s-r} \binom{n-s+r}{n-r} (x^2 - 1)^{s-r} (2x)^{2r-s}$$

$$= \frac{(x^2-1)^{s-n}}{2^n n!} \sum_{r \geq \frac{s}{2}}^s \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2 - 1)^{n-r} (2x)^{2r-s} = (x^2 - 1)^{s-n} \frac{D_n^s}{s!}$$

Si ahora recordamos que D_n^n no es más que el polinomio de Legendre P_n e indicamos con P_n^r ; ($-n \leq r \leq n$) las derivadas ($r > 0$) y ciertas primitivas ($r < 0$) de ese polinomio, llegaremos, haciendo $s = n + r$ a la siguiente *relación de simetría*

$$\frac{P_n^{-r}}{n-r} = (x^2 - 1)^r \frac{P_n^r}{n+r} \quad [I]$$

válida para $-n \leq r \leq n$.

Esta relación nos dice que las primitivas que entran en juego son los polinomios que admiten los valores -1 y 1 ; como ceros de orden r de multiplicidad ⁽¹⁾.

2. Generalización de una expresión de Dirichlet. —

Es conocida una fórmula de Dirichlet ⁽²⁾ que expresa P_n en función de $u = \cos \frac{\Phi}{2}$ y $v = \sin \frac{\Phi}{2}$; siendo $x = \cos \Phi = 2u^2 - 1 = 1 - 2v^2$.

Para extenderla a P_n^r , que es un polinomio de grado $n - r$ en x escribamos

$$P_n^r = \sum_{m=0}^{n-r} \varphi(n-r, m) \cdot u^{2(n-r-m)} v^{2m}$$

donde $\varphi(n-r, m)$ es un símbolo numérico con dos índices. Diferenciando y considerando que $dx = 4u du = -4v dv$,

$$P_n^{r+1} dx = \sum_{m=0}^{n-r} \varphi(n-r, m) u^{2(n-r-m)} v^{2m} \left[\frac{n-r-m}{2u^2} - \frac{m}{2v^2} \right] dx$$

de donde

$$P_n^{r+1} = \sum_{m=0}^{n-r-1} \varphi(n-r-1, m) u^{2(n-r-1-m)} v^{2m} =$$

⁽¹⁾ El profesor Toscano, de Messina, ha tenido la amabilidad de comunicarme que la relación de simetría puede obtenerse también partiendo de los polinomios de GEGENBAUER.

⁽²⁾ Véase, por ejemplo: W. LÁSKA, Sammlung von Formeln... Pag. 384.

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-r-1} [(n-r-m) \varphi(n-r, m) - (m+1) \varphi(n-r, m+1)] u^{2(n-r-1-m)} v^{2m};$$

y, por lo tanto, el símbolo $\varphi(n-r, m)$ satisface la siguiente relación recurrente:

$$2 \varphi(n-r-1, m) = (n-r-m) \varphi(n-r, m) - (m+1) \varphi(n-r, m+1);$$

que, mediante el cambio de símbolo

$$\varphi(n-r, m) = \frac{(-1)^{n-r} \cdot 2^{n-r}}{|n-r-m| \cdot |m|} \psi(n-r, m)$$

se convierte en

$$\psi(n-r-1, m) = \psi(n-r, m+1) - \psi(n-r, m) = \Delta \psi(n-r, m); \quad \Delta m = 1;$$

y en general

$$\psi(n-r, m) = \Delta^p \psi(n-r+p, m) = \sum_{s=0}^p \binom{p}{s} (-1)^s \psi(n-r+p, m+p-s).$$

Como

$$P_{n-n} = \frac{(x^2-1)^n}{2^n n!} = \frac{2^n (-1)^n}{n!} (uv)^{2n}$$

serán

$$m = n; \quad \varphi(2n, m) = \frac{2^n (-1)^n}{n!}, \quad \psi(2n, m) = \frac{(-1)^n n!}{2^n},$$

$$m \neq n; \quad \varphi(2n, m) = \psi(2n, m) = 0$$

y por lo tanto, si en la sumatoria anterior se hace $p = r + n$ el único término no nulo será cuando $s = r + m$, de donde

$$\begin{aligned} \psi(n-r, m) &= \binom{n+r}{m+r} (-1)^{m+r} \frac{(-1)^n n!}{2^n} = \\ &= \frac{|n-r-m| m}{2^{n-r}} (-1)^{n-r} \varphi(n-r, m), \\ \varphi(n-r, m) &= \frac{|n+r}{n! 2^r} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{n}{m+r}; \end{aligned}$$

y finalmente

$$P_n^r = \frac{|n+r}{2^r n!} \sum_{m+m'=n-r} \binom{n}{m} \binom{n}{m'} (-1)^m u^{2m} v^{2m'} \quad [2]$$

que es la generalización de la fórmula de Dirichlet, a la cual se reduce para $r=0$. Separando las derivadas de las primitivas, tenemos para $r \geq 0$,

$$P_n^r = \frac{|n+r}{2^r \cdot n!} \sum_{m=0}^{n-r} \binom{n}{m} \binom{n}{m+r} (-1)^m u^{2(n-r-m)} v^{2m}$$

$$P_n^{-r} = \frac{|n-r \cdot 2^r}{n!} \sum_{m=r}^n \binom{n}{m} \binom{n}{m-r} (-1)^m u^{2(n+r-m)} v^{2m};$$

y cambiando en esta última m por $m+r$

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{-r}}{|n-r|} &= \frac{2^r}{n!} \sum_{m=0}^{n-r} \binom{n}{m+r} \binom{n}{m} (-1)^{m+r} u^{2(n-m)} v^{2(m+r)} = \\ &= (-1)^r (2uv)^{2r} \frac{P_n^r}{|n+r|} \end{aligned}$$

y como $(-1)^r (2uv)^{2r} = (x^2 - 1)^r$ resulta nuevamente la relación de simetría.

3. Relaciones recurrentes. —

Entre las numerosas relaciones recurrentes que pueden establecerse entre las P_n^r veremos únicamente las generalizaciones de las más conocidas relaciones recurrentes entre las P_n .

De

$$\begin{aligned}
 P_n^r &= D_n^{n+r} = D_{n+r} \frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1} |n-1|} \cdot \frac{x^2-1}{2n} = \frac{x^2-1}{2n} D_{n-1}^{n+r} + \\
 &+ \frac{x(n+r)}{n} D_{n-1}^{n+r-1} + \frac{(n+r)(n+r-1)}{2n} D_{n-1}^{n+r-2} \\
 2n P_n^r &= (x^2-1) P_{n-1}^{r+1} + 2x(n+r) P_{n-1}^r + \\
 &+ (n+r)(n+r-1) P_{n-1}^{r-1}. \quad [3]
 \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned}
 D_n' &= D \frac{(x^2-1)^n}{2^n n!} = x \frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1} |n-1|} \\
 D_n^{n+r} &= D_{n+r-1} x \frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1} |n-1|} = x D_{n-1}^{n+r-1} + (n+r-1) D_{n-1}^{n+r-2} \\
 P_n^r &= x P_{n-1}^r + (n+r-1) P_{n-1}^{r-1}. \quad [4]
 \end{aligned}$$

De

$$\begin{aligned}
 D_n^2 &= D x \frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1} |n-1|} = D_{n-1}^0 + x^2 \frac{(x^2-1)^{n-2}}{2^{n-2} |n-1|} \\
 &= (2n-1) D_{n-1}^0 + D_{n-2}^0 \\
 D_n^{n+r} &= (2n-1) D_{n-1}^{n+r-2} + D_{n-2}^{n+r-2} \\
 P_n^r &= (2n-1) P_{n-1}^{r-1} + P_{n-2}^r \quad [5]
 \end{aligned}$$

4. Expresión de P_n^r por determinantes. —

Si eliminamos P_{n-1}^{r-1} entre [4] y [5]

$$(n+r-1) P_{n-2}^r - x(2n-1) P_{n-1}^r + (n-r) P_n^r = 0$$

que, para $r \geq 0$, haciendo $n=r+1, r+2, \dots, n$.

se obtiene

$$(-1)^{n-r-1} \underline{n-r} P_n^r = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x(2r+1) P_r^r \\ x(2r+3) & 2 & 0 & \dots & 0 & (2r+1) P_r^r \\ 2r+2 & x(2r+5) & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2r+3 & x(2r+7) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x(2n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

y como $P_r^r = (2r-1)!!$

$$P_n^r = \frac{(2r-1)!!}{|n-r|} \begin{vmatrix} x(2r+1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2r+1 & x(2r+3) & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x(2n-1) \end{vmatrix} ; \quad [6]$$

y utilizando la relación de simetría se puede también expresar mediante un determinante las primitivas P_n^{-r} .

5. Ecuación diferencial. —

Si eliminamos P_n^r entre [3] y [4] y cambiamos r y n por $r+1$ y $n+1$,

$$(1-x^2) P_n^{r+2} - 2x(r+1) P_n^{r+1} + (n-r)(n+r+1) P_n^r = 0.$$

lo que nos dice que la ecuación diferencial

$$(1-x^2) y'' - 2x(r+1) y' + (n-r)(n+r+1) y = 0 \quad [7]$$

tiene como integral particular P_n^r , de donde la integral general será, utilizando la relación de simetría

$$y = A P_n^r \int_B^x \frac{dt}{(1-t^2) P_n^t P_n^{-t}}$$

siendo A y B las constantes de integración.

(Original recibido en 1937)