RICARDO SAN JUAN

UN ALGORITMO DE SUMACION DE SERIES DIVERGENTES

UNION MATEMATICA ARGENTINA
Publicación N.º 21

BUENOS AIRES
1941

UN ALGORITMO DE SUMACION DE SERIES DIVERGENTES

por RICARDO SAN JUAN

Pólya y Rey Pastor (*) han generalizado el algoritmo de Borel introduciendo un parámetro complejo como coeficiente de la variable de integración en la asociada, con el cual se hace girar el camino de integración y se amplía el campo de convergencia hasta lograr el exterior de la cápsula de los puntos singulares de $f(z) = \Sigma \frac{a_n}{z^n}$. Si este parámetro α se toma como exponente de dicha variable t, además real y positivo menor que *1*, y luego se hace tender a *1*, resulta un algoritmo definido así:

$$(B_\alpha)\ \Sigma a_n z^n = \lim_{\alpha \to 1^-} \int_0^\infty e^{-t} \varphi(t^\alpha z)\, dt$$

$$\varphi(t^\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} [t^\alpha z]^n,$$

que comprende también al de Borel y efectúa la prolongación analítica de la serie $\Sigma a_n z^n$ en toda su estrella principal de Mittag-Leffler (**).

(*) POLYA. — "Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen". Mathematische Zeitschrift. B. 29. (1929) S. 549.

REY PASTOR. — *La investigación matemática.* Bol. crít. ped. 1919. *Notas de Análisis.* Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congresos de Cádiz (1927) y de Barcelona (1929). Rend. Ist. Lombardo (1931). Pág. 1293. Véase además la clara exposición de DOETSCH: Sitzungsberichte Akademie München (1931), pág. 1.

(**) Nótese la diferencia de este algoritmo con el de Mittag-Leffler ("Sur la représentation analytique etc...., "Acta Mathematica, B. 29, S. 101-181) en

Este algoritmo no es lineal, pero se transforma en lineal integrando término a término, y resulta el algoritmo de Le Roy de factores $\frac{(n\alpha)!}{n!}$ (*). Esta integración puede interpretarse así:

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\,\varphi\,(t^{\alpha}\,z)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}}\,\varphi\,(tz)\,dt^{\frac{1}{\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n\alpha)!}{n!}\,a_n\,z^n$$

El algoritmo B_α *se deduce del algoritmo lineal de Le Roy* L_α *de factores* $\frac{(n\alpha)!}{n!}$ *sustituyendo la serie auxiliar de éste por su suma con el método de momentos* $(n\,\alpha)!$ *y generatriz* $\frac{1}{\alpha}\,e^{t^{\frac{1}{\alpha}}}\,t^{\frac{1}{\alpha}-1}$ *que también se debe a Le Roy* (**).

Aplicando las propiedades de permanencia y prolongación analítica de estos dos algoritmos de Le Roy resulta:

El algoritmo B_α *efectúa la prolongación analítica de cada serie* $\Sigma\,a_n\,z^n$ *en toda su estrella principal de Mittag-Leffler.*

Para ver que este algoritmo B_α comprende también al de Borel aunque la serie tenga radio nulo, basta observar que la expresión B resulta de aplicar a la integral de Borel los factores de sumación (***).

$$\mu\,(\alpha_1\,t) = \frac{1}{\alpha}\,e^{t-t^{\frac{1}{\alpha}}}\,t^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

que los términos de la asociada tienen denominadores $(n\,\alpha)!$ y para alcanzar un punto prefijado de la estrella hay que tomar α suficientemente pequeño.

Un estudio sistemático de los algoritmos de prolongación analítica fué hecho por Buhl en su fascículo ''Séries analytiques. Sommabilité''. (Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. VII) donde pueden verse diversos métodos que efectúan la prolongación en toda la estrella de Mittag-Leffler, pero con procesos más complicados que el B_α.

(*) Le Roy. — *Sur les séries divergents.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1900).

(**) Esto puede aplicarse a cualquier algoritmo lineal sumando su serie auxiliar con un método de momentos o con otro algoritmo lineal.

(***) Pueden utilizarse factores de convergencia efectuando previamente una que efectivamente satisfacen las condiciones de Perron:

$$\lim_{\alpha \to 1} \mu(\alpha_1 t) = 1 \qquad \text{para cada } t$$

$$\int_0^{\infty} |d\,\mu(\alpha_1 t)| < k \qquad \text{en un semientorno de } 1^- .$$

En efecto, se verifica:

$$\int_0^{\infty} \left| d\,\frac{1}{\alpha}\, e^{t - t^{\frac{1}{\alpha}}}\, t^{\frac{1}{\alpha}-1} \right| = \int_0^{\alpha_1} \left| d\,\frac{1}{\alpha}\, e^{t - t^{\frac{1}{\alpha}}}\, t^{\frac{1}{\alpha}-1} \right| - \int_{\alpha_1}^{\infty} \left| d\,\frac{1}{\alpha}\, e^{t - t^{\frac{1}{\alpha}}}\, t^{\frac{1}{\alpha}-1} \right| =$$

$$= 2\,\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha_1 - \alpha_1^{\frac{1}{\alpha}}}\, \alpha_1^{\frac{1}{\alpha}-1}$$

siendo α_1 la raíz positiva de $\frac{1}{\alpha}\, t^{\frac{1}{\alpha}} - t - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = 0$, donde cambia de signo el integrando

$$e^{t - t^{\frac{1}{\alpha}}}\, \frac{1}{\alpha}\, t^{\frac{1}{\alpha}-2} \left(\frac{1}{\alpha} - 1 + t - \frac{1}{\alpha}\, t^{\frac{1}{\alpha}}\right),$$

la cual es $\alpha_1 < e$, puesto que

$$\frac{1}{\alpha}\, e^{\frac{1}{\alpha}} - e \geqq e^{\frac{1}{\alpha}} - e = e^{\xi} \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) > \frac{1}{\alpha} - 1 \qquad \left(1 < \xi < \frac{1}{\alpha}\right)$$

y resulta:

$$2\,\frac{1}{\alpha}\, e^{\alpha_1 - \alpha_1^{\frac{1}{\alpha}}}\, \alpha_1^{\frac{1}{\alpha}-1} < 2\,\frac{1}{\alpha}\, e^{e}\, e^{\frac{1}{\alpha}-1} \to 2\, e^{e} \qquad \text{para} \quad t \to 1^- .$$

Toda serie sumable B *es sumable* B_α *y con igual suma.*

---

integración por partes sobre

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{-t}\, \varphi(t z)\, dt.$$

Este artificio se generaliza como método para deducir las condiciones anteriores de las de permanencia para factores que conservan los límites nulos, correlativamente a la demostración del teorema de Perron que dimos en nuestra Tésis doctoral (R. S. San Juan, *Sumación de series de radio nulo*, etc... Revista de la Academia de Ciencias de Madrid (1933).

Véase también *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, de Rey Pastor.

Esta generalización de B puede extenderse al método de Le Roy de momentos $(n\,p)!$ siendo $p > 0$ y resulta un algoritmo:

$$(L_{p_\alpha})\ \Sigma\, a_n z^n = \lim_{\alpha \to 1^-} \int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{p}}}\, \varphi_p(t^\alpha z)\, dt^{\frac{1}{p}} =$$

$$\lim_{\alpha \to 1^-} \int_0^\infty e^{-t^{\frac{1}{p \cdot \alpha}}}\, \varphi_p(tz)\, dt^{\frac{1}{p\,\alpha}}$$

$$\varphi_p(tz) = \sum_{n=0} \frac{a_n}{(np)!}\, t^n z^n$$

que comprende a los dos algoritmos de Le Roy y al de Borel.