ENSAYO SOBRE UN ANALISIS ARQUIMEDIANO

por Horacio E. Calcagno

El *principio de Eudoxio* (llamado también «axioma métrico» de Arquímedes) tiene una gran importancia en la teoría de las magnitudes, porque mediante él se consigue la mensurabilidad. En el análisis clásico, la validez de este axioma se ha restringido al campo positivo, es decir, estamos frente al postulado siguiente:

(I) *El axioma métrico de Arquímedes es válido solamente en el campo de los números positivos.*

Aunque este postulado no se suele establecer de una manera explícita, ha sido sin embargo aceptado tácitamente por la mayor parte de los autores. En otras palabras, si llamamos (A) al conjunto de postulados y axiomas que están en la base del análisis clásico, podemos reconocer al postulado (I) como uno de los elementos de (A). Nuestro propósito es, por el contrario, sustituir en (A) el postulado (I) por el siguiente:

(II) *El axioma métrico de Arquímedes es válido en el campo de los números complejos de dos (o más) componentes.*

Veamos ahora las primeras consecuencias que surgen de esta sustitución. Podemos imaginar — en el campo complejo — muchas ordenaciones diferentes, tanto arquimedianas como no arquimedianas (1). Un ejemplo de ordenación *no arquimediana* es la de Thieme, expuesta por Rey Pastor (2). Esta tiene la ventaja de conservar, en el campo complejo, la validez de la ley de monotonía, pero no permite utilizar cómodamente la idea de desigualdad entre los números complejos. Además, al sacrificar la validez del axioma métrico, se pierde la mensurabilidad y con ella, la posibilidad de ampliar la idea de número sin aumentar las dimensiones.

Ahora bien, con el mismo derecho, podemos sacrificar la ley de monotonía a favor del axioma métrico, convenientemente generalizado. Entre las muchas ordenaciones posibles, nosotros proponemos la siguiente:

(III) *El número complejo* A_α ($A = mod.\ A_\alpha$; $\alpha = arg.\ A_\alpha$) *es* menor ($<$) *que el número complejo* B_β *cuando* $A < B$, $\alpha \lesseqgtr \beta$; *y si es* $A = B$, *debe cumplirse* $\alpha < \beta$.

O también

El punto A_α (coordenadas polares) es *anterior* al punto B_β cuando $A < B$, $\alpha \lesseqgtr \beta$; y si es $A = B$, debe cumplirse $\alpha < \beta$.

---

(1) Las ordenaciones se clasifican en arquimedianas y no arquimedianas según que los números complejos satisfagan o no el axioma métrico.

(2) J. Rey Pastor, *Análisis algebraico*, 2ª edición, pág. 441.

De acuerdo con esta ordenación, los números complejos *crecientes* están representados geométricamente por el desplazamiento de un punto sobre una infinidad de circunferencias concéntricas de radios no decrecientes, lo que nos permite clasificar a los números complejos entre los magnitudes *arquimedianas*. En efecto, si $A_\alpha < B_\beta$, siendo A y B finitos, es siempre posible encontrar un número natural n, suficientemente grande, tal que $n A_\alpha > B_\beta$.

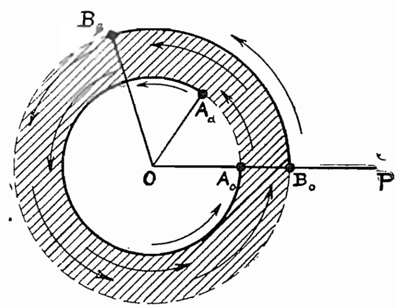
Esta ordenación — que llamamos *arquimediana circular* — nos conduce, sin salir del plano, a una ampliación de la idea de número. En efecto, supongamos $A_\alpha < B_\beta$ siendo A_α y B_β números complejos usuales y donde el signo $<$ (menor) tiene el significado que hemos definido en (III). En estas condiciones, llamamos *intervalo plano* o también *intervalo complejo entre* A_α y B_β al conjunto de todos los números z (reales y complejos) que satisfacen la doble desigualdad

$$(1) \qquad A_\alpha \leq z \leq B_\beta \qquad .$$

Este intervalo corresponde geométricamente a un anillo o corona circular (ver la figura) que representaremos con la notación

$$\{ A_\alpha \ ; \ B_\beta \}$$

que se lee: intervalo complejo entre A_α y B_β.



La medida (en el sentido ordinario) de este anillo es independiente de los argumentos de los extremos del intervalo; depende únicamente del valor aritmético de los módulos A y B. En el caso particular

$$A = B, \qquad \alpha < \beta$$

el intervalo complejo entre A_α y A_β corresponde geométricamente al arco de circunferencia $\beta - \alpha$.

Veamos ahora lo que entendemos por *medida en el campo complejo*.

(IV) *Dados los puntos z que satisfacen la doble desigualdad (1), la medida del intervalo complejo* $\{ A_\alpha \, ; \, B_\beta \}$ *está dada por el* número *que mide la zona del plano cubierta por los puntos z.*

Esta definición nos conduce a una nueva especie de número complejo sin entrar en la tercera dimensión, puesto que obtenemos un ente numérico definido por dos elementos diferentes que son: 1.º) una componente superficial (área) y 2.º) dos componentes lineales (longitudes de las curvas fronteras determinadas por la ordenación elegida). Aunque nosotros utilizamos en este trabajo únicamente el crecimiento arquimediano circular, es sin embargo igualmente posible imaginar otros crecimientos arquimedianos *no circulares* (por ejemplo, elípticos, etc.).

Por lo tanto, en nuestro caso, la medida del intervalo complejo $\{ A_\alpha \, ; \, B_\beta \}$ está dada por el «número complejo»

$$\pi \, (B^2 - A^2)_{2 \pi A - \alpha \, ; \, \beta}$$

donde los arcos $2 \pi A - \alpha$ y β indican respectivamente la porción de frontera inferior y superior cubierta por el intervalo.

Inversamente, el «número complejo»

$$\pi \, (M - N)_{\sigma \, ; \, \tau}$$

es la medida del intervalo complejo

$$\left\{ \left| \sqrt{N} \right|_{2 \pi \sqrt{N} - \sigma} \; ; \; \left| \sqrt{M} \right|_{\tau} \right\}$$

Como vemos, el concepto de anillo circular (intervalo complejo) es la generalización natural de la idea de segmento rectilíneo (intervalo real). En efecto, en un segmento (a, b) tenemos el extremo inferior a. el extremo superior b, y la medida del segmento está dada por el número real b — a, en cuya medida intervienen *todos* los puntos del segmento que son posteriores al punto a y anteriores al punto b, incluso los extremos. Análogamente, en un anillo circular $\{ A_\alpha \, ; \, B_\beta \}$ tenemos el extremo inferior A_α, el extremo superior B_β y la medida del anillo está dada por el «número complejo» $\pi \, (B^2 - A^2)_{2 \pi A - \alpha \, ; \, \beta}$ en cuya medida intervienen *todos* los puntos del plano que son posteriores al punto A_α y anteriores al punto B_β, incluso los extremos. En el nuevo campo no tiene significado el concepto de *izquierda* y *derecha*. En general, ocupa su lugar la idea de *interior* y *exterior* a un recinto dado (por ejemplo, un círculo), excepto en el caso de anulación de área, pues entonces el intervalo complejo queda reducido a una longitud de arco.

Se modifica también la idea de continuidad, hasta el extremo que la circunferencia es la única curva continua; todas las demás son inevitablemente *discontinuas*. En efecto, si δ es positivo y arbitrariamente pequeño, el intervalo complejo

$$\{ a_{0^o} \; ; \; |a + \delta|_{0^o} \}$$

está medido por la longitud $2 \pi a$. Tenemos, pues, dos números positivos arbitrariamente próximos *entre* los cuales cabe, sin embargo, una longitud finita. Por otra parte, es evidente que esta especie de discontinuidad no afecta las propiedades ya conocidas de cada curva, por ejemplo, la existencia de la tangente, etc. Pero es más aún, si aceptamos la ordenación de Thieme-Rey Pastor, todas las curvas son discontinuas, incluso la circunferencia; verificándose la continuidad únicamente en el desplazamiento de un punto sobre una infinidad de rectas paralelas al eje de las Y.

Los intervalos complejos, tal como los hemos definido, pueden ser considerados como entes numéricos o geométricos, siendo posible establecer entre ellos las relaciones y operaciones corrientes. Nos limitamos en este trabajo a la igualdad, suma y producto.

IGUALDAD. Sean los intervalos complejos $\{A_\alpha \; ; \; B_\beta\}$ y $\{C_\gamma \; ; \; D_\delta\}$. Estos anillos están medidos respectivamente por los «números complejos»

$$\pi (B^2 - A^2)_{2 \pi A - \alpha; \beta} \quad y \quad \pi (D^2 - C^2)_{2 \pi C - \gamma; \delta}$$

Decimos que $\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \} = \{ C_\gamma \; ; \; D_\delta \}$ cuando se cumple simultáneamente

$$\pi (B^2 - A^2) = \pi (D^2 - C^2)$$

$$2 \pi A - \alpha + \beta = 2 \pi C - \gamma + \delta$$

Si $A \neq C$, ésta definición de igualdad implica siempre una *dilatación* o una *contracción* y nos conduce a la ecuación

$$\{A_\alpha \; ; \; B_\beta\} = \{C_\gamma \; ; \; X_\sigma\}$$

donde X_σ es la incógnita.

La solución es

$$X = \sqrt{B^2 + C^2 - A^2}$$

$$\delta = 2 \pi A - \alpha + \beta - (2 \pi C - \gamma)$$

en el entendido que α, β, γ y δ son longitudes de arco.

Ejemplo. Resolver la ecuación

$$\{ 1_{20^o} \; ; \; 2_{80^o} \} = \{ 3_{300^o} \; ; \; X_\sigma \}$$

Podemos escribir

$$\left\{ 1_{\frac{\pi}{9}} \; ; \; 2_{\frac{8\pi}{9}} \right\} = \left\{ 3_{5\pi} \; ; \; X_\sigma \right\}$$

Finalmente

$$X = 2\sqrt{3}\,, \quad \delta = \frac{16\,\pi}{9}$$

Suma. Dados los intervalos complejos $\left\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \right\}$ y $\left\{ C_\gamma \; ; \; D_\delta \right\}$ vamos a ligar estos dos entes con una operación que llamamos *suma,* definida por la condición siguiente: el número que mide cada una de las componentes del *intervalo suma* debe ser igual a la suma usual de los números que miden las componentes respectivas de los sumandos.

Siendo $A < B$ y $C < D$, podemos escribir

$$\text{medida} \left\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \right\} = \pi \left(B^2 - A^2\right)_{2\pi A - \alpha;\, \beta}$$

$$\text{medida} \left\{ C_\gamma \; ; \; D_\delta \right\} = \pi \left(D^2 - C^2\right)_{2\pi C - \gamma;\, \delta}$$

Por definición, tenemos

$$\text{medida} \left(\left\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \right\} + \left\{ C_\gamma \; ; \; D_\delta \right\} \right) =$$
$$= \pi \left[B^2 + D^2 - (A^2 + C^2)\right]_{2\pi A - \alpha + 2\pi C - \gamma;\, \beta + \delta}$$

Finalmente

$$(2) \qquad \left\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \right\} + \left\{ C_\gamma \; ; \; D_\delta \right\} \equiv$$
$$\equiv \left\{ \sqrt{A^2 + C^2}_{\,2\pi\sqrt{A^2 + C^2} - (2\pi A - \alpha + 2\pi C - \gamma)} \; ; \; \sqrt{B^2 + D^2}_{\,\beta + \delta} \right\}$$

que se lee: intervalo complejo entre A_α y B_β *más* intervalo complejo entre C_γ y D_δ es *idéntico* al intervalo complejo entre $\sqrt{A^2 + C^2}$, etc.

Producto simple. Sea m un número real (positivo o negativo) y $\left\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \right\}$ un intervalo complejo. Vamos a ligar estos dos entes con una operación que llamamos *producto simple* definido por la condición siguiente: el número que mide cada una de las componentes del *intervalo-producto* debe ser igual al producto de m por el número que mide las componentes respectivas de $\left\{ A_\alpha \; ; \; B_\beta \right\}$.

Podemos escribir

$$\text{medida } (m\{A\alpha\ ;\ B\beta\}) = m\ [n\ (B^2 - A^2)_{2\pi A - \alpha;\ \beta}\ ]$$

Por definición, el factor m afecta a todas las componentes, es decir:

$$\text{medida } (m\{A\alpha\ ;\ B\beta\}) = \pi\ (B^2 m - A^2 m)_{m\,(2\pi A - \alpha);\ m\beta}$$

Finalmente

$$(3) \qquad m\{A\alpha\ ;\ B\beta\} \equiv \{A\sqrt{m}_{\,2\pi A\sqrt{m} - m\,(2\pi A - \alpha)}\ ;\ B\sqrt{m}_{\,m\beta}\}$$

En el caso particular $m = -1$, obtenemos

$$-\{A\alpha\ ;\ B\beta\} \equiv \{A\sqrt{-1}_{\,2\pi A\sqrt{-1} + 2\pi A - \alpha}\ ;\ B\sqrt{-1}_{\,-\beta}\}$$

Esta fórmula nos indica que un intervalo complejo *negativo* puede expresarse en forma *imaginaria,* pero sin que hubiéramos podido acertar, hasta ahora, con una representación geométrica adecuada.

Montevideo, octubre 1939.