TEMAS PROPUESTOS

1.—Estudiar la correspondencia siguiente:

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{2^i} \qquad\qquad y = \lim_{n \to \infty} 2^{-n} \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} k_i$$

siendo k_i los números 0 ó 1, es decir, las cifras del número racional $0 \leqq x \leqq 1$, expresado en el sistema de numeración de base 2.

J. Babini

2.—Desarrollar en serie de potencias de z la función w definida por la ecuación $w = e^{hzw}$.

J. Babini

3.—Calcular los coeficientes del desarrollo en serie convergente:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} c_n \frac{x}{x^2 + n^2}$$

J. Rey Pastor

4.—¿Existe en cada intervalo algún conjunto de medida menor que él y tal que los conjuntos parciales contenidos en intervalos iguales tengan iguales medidas?

R. Frucht

5.—Dados al azar dos pares de puntos sobre el contorno de un polígono convexo, calcular la probabilidad de que el punto de intersección de las rectas que determinan, sea interior al polígono.

(Para el cuadrilátero está resuelto en la obra de *Czuber,* Geometrische Wahscheinlichkeiten und Mittelwerte (Trad. de Schuermans, 1902). Problema XIII del Cap. I).

6.—Demostrar que la probabilidad de que dos rectas que cortan a un polígono regular de $2n$ lados se corten entre sí bajo un ángulo agudo igual o menor que $\frac{\pi}{2n}$, vale $\frac{1}{n}$.

L. A. Santaló

7.—Sean dos rectas fijas del plano. ¿Se pueden colocar en el mismo plano 6 segmentos de longitudes cualesquiera paralelos a una u otra de las dos rectas y tales que 5 a 5 de ellos tengan una secante común y sin embargo no haya una recta que corte a todos?

L. A. Santaló

8.—Estudiar las propiedades de la función definida por la serie

$$\frac{(x)}{1^2}+\frac{(2x)}{2^2}+\frac{(2^2x)}{2^4}+\cdots+\frac{(2^nx)}{2^{2n}}+\cdots$$

designando por (x) la mantisa mínima de x, esto es, la diferencia positiva o negativa, entre x y el entero más próximo. Compárense sus propiedades con las de su análoga menos sencilla, utilizada por Riemann, completando al mismo tiempo las propiedades de ésta, que suelen figurar en los tratados de funciones reales.

R. P.

9.—Formar una sucesión de funciones continuas convergentes hacia la función discontinua definida así: el valor para todo número racional es la unidad fraccionaria que tiene el mismo denominador; el valor para todo x irracional es 0.

Aplíquese el método a funciones más generales que sean continuas salvo en un conjunto numerable denso en el intervalo.

R. P.

10.—Estudiar el recinto definido por la condición

$$|1-z|<k\,(1-|z|)$$

que se presenta al estudiar la convergencia de las series de potencias en puntos del contorno del campo de convergencia.

A. S.

11.—Construir una función $f(x)$ con un conjunto denso de discontinuidades y que sea la derivada de otra función en todo un intervalo.

E. Samatán

12.—Una recta móvil divide a una figura convexa plana en dos porciones de área constante. Demostrar que el lugar geométrico de los centros de gravedad de estos sectores es una línea que tiene las tangentes paralelas a las cuerdas respectivas y cuyo radio de curvatura en cada punto es igual al cubo de la cuerda respectiva dividido por 12 veces el área constante del sector. Generalización.

L. S.

13.—Construir la tangente en cada uno de sus puntos a la curva de contacto de una esfera con el conoide circunscripto definido por una directriz rectilínea exterior y la recta impropia del plano perpendicular a ésta. Generalización.

P. Rosell Soler

14.—Estudiar la función o funciones analíticas definidas por la expresión

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^3}{z^4 + (a^2 - xz)^2}\, d\,x.$$

R. P.

15.—Generalizar al campo complejo la función de Dirichlet, partiendo de su expresión:

$$\lim_m \lim_n (\cos m!\, \pi z)^{2n} \text{ para } m \to \infty,\ n \to \infty.$$

R. P.

16.—Construir una curva de Jordan que sea cortada por toda recta en una sucesión numerable de puntos. ¿Existe una curva de Jordan que sea cortada por cada recta del plano en un conjunto que tenga la potencia del continuo?

F. T.

17.—Calcular la derivada según la dirección del radio en cada punto de la circunferencia, de la función armónica regular en el círculo que en la circunferencia toma los valores dados por una función continua dada.

R. P.

18.—Consideremos dos curvas rectificables de Jordan, una fija y otra móvil; si es l la longitud de la parte de curva móvil contenida en el interior de la primera, estudiar su dependencia respecto de los tres parámetros que determinan la posición de la curva móvil, viendo si es función continua de ellos, salvo en un conjunto de medida nula.

M. Balanzat

19.—Dado un conjunto plano C, si con centro en cada punto de C se traza una circunferencia y es A el conjunto de puntos de estas circunferencias, estudiar las relaciones entre ambos. Si C es medible, lineal o superficialmente ¿lo es también A? Si C tiene medida no nula ¿lo será también A?

M. Balanzat

20.—Es sabido que la unidad puede descomponerse de infinitos modos en suma de fracciones simples $1/n$. ¿Existe alguna descomposición cuyos denominadores sean todos impares y distintos?

R. Frucht

21.—Llamaremos *desviación* de un sistema de puntos de un plano respecto de una circunferencia a la suma de los cuadrados de las potencias de cada punto del sistema respecto de la circunferencia.

Se pide, dado el sistema, determinar la circunferencia cuya desviación sea mínima; analizar geométricamente la solución. Generalizar.

A. Valeiras

22.—Calcular para $n \rightarrow \infty$ el límite de la suma:

$$1^m n^m + 2^m (n-1)^m + \ldots + n^m 1^m$$

para los diversos valores del parámetro real m. Generalización.

R. P.

23.—Si una serie de potencias converge en un punto de su circunferencia de convergencia, ¿bajo qué condiciones converge en el mismo punto el desarrollo tayloriano de la función analítica definida por la serie, efectuado en un punto interior al círculo?

R. P.

CUESTIONES ELEMENTALES

1. — Truncar un triángulo de base *a*, de modo que resulte un cuadrilátero de la misma base a, con los tres lados restantes iguales.
2. — Encontrar una curva tal que la tangente en cada punto sea perpendicular a una de las tangentes traz das desde el mismo a una circunferencia fija.
3. — Calcular la suma de los infinitos segmentos obtenidos al proyectar un punto de un lado de un ángulo agudo sobre el otro, la proyección obtenida se proyecta sobre el primer lado, etc.
   Generalizar el problema cuando la dirección de las proyecciones sobre cada lado no es perpendicular a él.
4. — Calcular la longitud total recorrida por cada uno de los rayos luminosos emitidos por un punto luminoso interior al diedro agudo formado por dos espejos, en cualquier dirección normal a la arista del diedro agudo, al reflejarse sucesiva o indefinidamente en ambos espejos.
5. — Construir una curva tal que para todo punto X del eje x se verifique la igualdad de ángulos OXP = 2PXA, siendo P y A puntos fijos del eje y.
   Aplíquese a la resolución gráfica de la trisección del ángulo y generalícese para la división en n partes iguales.
6. — Si ABC y A'B'C' son triángulos semejantes, demostrar que el triángulo formado por los puntos que dividen a los segmentos *AA' BB' CC'* en una misma razón, es semejante a ellos.
7. — Calcular los máximos y mínimos de la función $z = ax^m + by^m$. Discusión.
8. — Un cazador parte del punto *A* y camina 10 km. hacia el Sur; como allí no encuentra caza, camina un rato hacia el Este, mata un oso y regresa en línea recta hacia el punto *A*, caminando 10 km. ¿De qué color era el oso?