VALOR MEDIO DEL NUMERO DE PARTES EN QUE UNA FIGURA CONVEXA ES DIVIDIDA POR n RECTAS ARBITRARIAS

por L. A. Santaló

Sea una figura convexa K de área F y perímetro L. Suponiendo trazadas n rectas que cortan a K, el número de regiones en que queda dividida depende de la posición de las rectas. Por ejemplo, para $n=4$, en la fig. 1 el número N de regiones es 9 y en la fig. 2 es 7. Queremos hallar el *valor medio* del número de estas regiones para todas las posiciones posibles de las n rectas. Este número N veremos que está relacionado muy simplemente con el número N' de puntos de intersección de las rectas entre sí que son interiores a K; así en la fig. 1 es $N'=4$ y en la fig. 2 es $N'=2$. Empezaremos para hallar el valor medio de este último número N' para pasar luego al buscado.

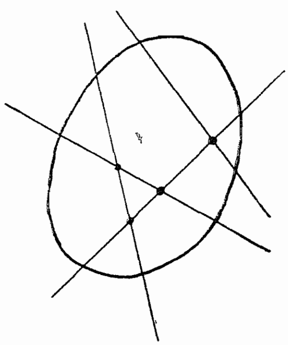

Fig. 1

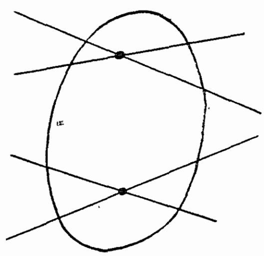

Fig. 2

1. Recordemos que como medida de un conjunto de rectas se entiende simplemente el valor de la integral doble, extendida al conjunto considerado, de la expresión $dG = dp\, d\Theta$ siendo p la distancia de la recta a un origen fijo y Θ el ángulo de la normal a la recta con una dirección también fija (fig. 3). Solamente habrá lugar, en esta nota, a considerar conjuntos de rectas para los que la integral anterior existe. Por ejemplo la medida de las rectas que cortan a un segmento de longitud l

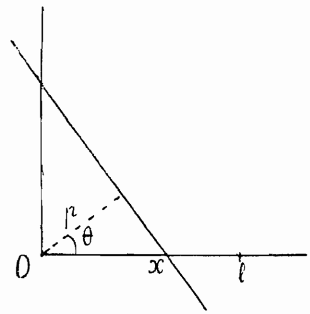

Fig. 3

se puede calcular directamente: si se supone que la posición del segmento es la O, l de la fig. 3, llamando x a la abscisa del punto de intersección será

$$\int dp\, d\Theta = \int_0^l dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Theta\, d\Theta = 2\,l \qquad (1)$$

Se puede ver que este valor es independiente de la posición del segmento en el plano.

En general si hay m segmentos de longitudes l_i, llamando ν al número de ellos que son cortados por una recta G en cada posición de la misma, sumando las integrales (1) correspondientes a cada segmento, se obtiene

$$\int \nu\, dG = 2 \sum_{i=1}^{m} l_i \qquad (2)$$

extendida la integración a todas las posiciones de la recta.

Para el problema que nos ocupa debemos también recordar que la medida de las rectas que cortan a una figura convexa K es igual a su longitud, o sea

$$\int_{G\,.\,K \neq 0} dG = L \qquad (3)$$

indicando por $G . K \neq O$ que la integración está extendida a todas las rectas que cortan a K o sea, cuya intersección con K es distinta de cero.

Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en la figura convexa K también debemos recordar la fórmula casi inmediata

$$\int s\, d\, G = \pi\, F \tag{4}$$

fácil de obtener integrando primero $s\, dp$ (lo que dá el área F) y luego haciendo variar Θ de O a π.

2. Por *valor medio* del número de puntos N' de intersección de las n rectas que son interiores a K se entiende lo siguiente. El número N' es una función de las n rectas G_i, o sea de sus $2\,n$ coordenadas p_i, Θ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$; si se sabe calcular la integral

$$J' = \int N'\, d\, G_1\, d\, G_2\, d\, G_3 \ldots d\, G_n \tag{5}$$

extendida a todas las posiciones de las n rectas en las cuales cortan a K, como además la medida de todas estas posiciones posibles según (3) vale

$$\int_{G_i . K \neq o} d\, G_1\, d\, G_2\, d\, G_3 \ldots d\, G_n = L^n \tag{6}$$

el *valor medio* de N' será, por definición, el cociente entre (5) y (6).

3. Hay pues que calcular J'. Llamando N'_{ij} a una función de G_i y G_j (o sea de p_i, Θ_i, p_j, Θ_j) tal que valga uno si G_i y G_j se cortan dentro de K y cero si se cortan fuera (por uniformidad pondremos también $N'_{ii} = 0$). Por cada posición de las N rectas es

$$N' = \sum_{i, j} N'_{ij}$$

y el número de las N'_{ij} es igual al de combinaciones de las *n* rectas tomadas 2 a 2 o sea $\binom{n}{2}$.

Llamando s_i a la longitud de la cuerda que G_i determina en K, según (1) y (4) se tiene

$$\int_{G_i . K \neq 0} N'_{ij} \, dG_i \, dG_j = 2 \int s_i \, dG_i = 2 \pi F$$

Luego

$$J' = \int N' \, dG_1 \, dG_2 \ldots dG_n = \sum_{i,j} \int N'_{ij} \, dG_1 \, dG_2 \ldots dG_n =$$
$$= \binom{n}{2} \, 2 \pi F L^{n-2} \tag{7}$$

Dividiendo (7) por (6) se obtendrá por tanto, como valor medio de puntos de intersección N' que son interiores a K

$$\boxed{\overline{N}' = \binom{n}{2} \frac{2 \pi F}{L^2}} \tag{8}$$

4. Para pasar de N' al número N de regiones en que las *n* rectas dividen a K se observa en primer lugar que las posiciones de las rectas en las cuales pasan más de 2 por un mismo punto son posiciones especiales de medida cero, es decir, sin influencia en las integrales (5) o (6) ni por tanto en los valores medios. Para las demás posiciones vamos a demostrar que se cumple la relación

$$N = N' + n + 1 \tag{9}$$

Por ejemplo en la figura 1 es $N' = 4$, $n = 4$, $N = 9$ y en la fig. 2 es $n = 4$, $N' = 2$, $N = 7$.

Para demostrar (9) consideremos la red formada por las *n* rectas y el contorno de K. El número de *vértices* es igual a N' más los $2n$ puntos que las rectas determinan en el contorno de K. El número de *regiones* es por definición N. Para el número de lados se observa que por cada uno de los N' vértices interiores pasan 4 y por cada uno de los vértices del contorno pasan 3; como cada lado pertenece a 2 vértices el número de ellos será por tanto $1/2\,(4\,N' + 6\,n) = 2\,N' + 3\,n$. Pero el teorema de Euler para superficies abiertas dice que el número de *regiones* más el de *vértices* es igual al de *lados* más uno, luego

$$N + N' + 2\,n = 2\,N' + 3\,n + 1$$

de donde resulta la igualdad (9) que queríamos demostrar.

El *valor medio* del número de regiones N, teniendo en cuenta (8) y (9) será por tanto

$$\boxed{\overline{N} = \binom{n}{2}\frac{2\,\pi\,F}{L^2} + n + 1}$$

5. El número total de lados de la red formada por el contorno de K más las cuerdas que las rectas G_i determinan en esta figura convexa hemos visto que era $2\,N' + 3\,n$. El número de lados del contorno es $2\,n$, luego el número de lados interiores será $2\,N' + n$. Llamando λ_i al número de lados de la región C_i, al sumar las λ_i para todas las regiones se observa que cada lado interior aparece contado dos veces y cada lado del contorno una sola vez, por tanto

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 2\,(2\,N' + n) + 2\,n = 4\,N' + 4\,n.$$

De aquí que el *valor medio* del número de lados de las regiones en que una figura convexa K queda dividida por *n* rectas arbitrarias que la cortan es

$$\overline{\lambda} = \frac{4\,\overline{N}' + 4\,n}{\overline{N}} = \frac{4\,\overline{N}' + 4\,n}{\overline{N}' + n + 1} < 4.$$

$\overline{N}'$ está dado por (8).