EL LUGAR GEOMETRICO Y LUGARES DE PUNTOS AREAS EN EL PLANO

Por V. y A. FRAILE y C. CRESPO

I. - TEORIA GENERAL

1. — El concepto de lugar geométrico lleva en sí el de pluralidad.

Vamos a empezar sirviéndonos de unos ejemplos sumamente elementales que nos permitirán obtener una clasificación de los lugares y establecer algunas conclusiones.

Dados los puntos A y B, existe solamente un punto de su recta que equidista de ambos, siendo finita la distancia. Existen dos que cumplen esta condición situados en la circunferencia de diámetro A B; y existen infinitos situados en un plano que contenga a A y a B. He aquí otra forma de expresar estos tres casos: dos puntos de un espacio E_1 se reproducen aplicando un criterio y originan un nuevo punto; originan simultáneamente dos introduciendo otro espacio E'_1; crean simultáneamente una infinidad continua de puntos si se introduce un espacio E_2. En el primer caso no hay lugar geométrico, por no existir pluralidad de soluciones. En los otros dos sí hay lugar geométrico. Sin embargo, sólo cuando se trata de una infinidad continua de soluciones al problema suele aplicarse el nombre *lugar*.

Si en el primer ejemplo consideramos un haz plano de rectas de vértice A que contenga a la recta A B, y en cada una de ellas aplicamos aquel criterio de equidistancia, referido a los puntos A, fijo, y B_i de la circunferencia de centro A y radio A B, obtenemos una infinidad continua de soluciones, y, por lo tanto, un l. g.; pero esta infinidad de puntos no se produce simultáneamente, como en el ejemplo tercero, sino que se obtiene aplicando infinitas veces el criterio dado en distintos espacios E_i; es decir, por generación. Podemos generalizar diciendo que hay dos formas de enunciar lugares geométricos: establecer un criterio sobre entes fijos de un espacio E_n, de manera que haya una infinidad continua de nuevos entes que le satisfacen simultáneamente; aplicar infinito número de veces un mismo criterio sobre entes dados, parte de los cuales son fijos y variables los demás, cuando de este criterio se obtiene cada vez un nuevo ente, o un conjunto numerable de nuevos entes, con la condición al menos de ser continuos los sistemas en los que se mueven los entes dados variables. Hay, pues, lugares que podremos llamar por *síntesis* y por *generación*.

En el último de los tres ejemplos que hemos establecido se trata de un lugar por síntesis. Puede obtenerse también de esta otra manera: sean los puntos A, B y una recta r que contiene a A. Sobre r existe un sólo punto, propio o impropio, que equidista de A y B. Apliquemos ahora este criterio de equidistancia en cada una de las rectas del haz de vértice A y plano (r, B), con lo cual obtenemos la mediatriz del segmento A B, lo mismo que antes, pero esta vez por generación. En esencia, no hemos hecho sino restringir la dimensión del espacio selectivo y, por medio de éste, generar el otro.

Cuando se trata de lugares de puntos es muy fácil probar que todo lugar por síntesis lo es también por generación. En efecto: supongamos que en un espacio lineal E_n, de dimensión mínima n, obtenemos, por síntesis, un lugar de puntos de m dimensiones $(n > m)$. Un cierto hiperplano G_{n-1} de E_n corta al lugar según una o más variedades de dimensión $m-1$; otro hiperplano G_{n-2} de G_{n-1} lo corta según variedades de $m-2$ dimensiones; etc. Finalmente, un último hiperplano G_{n-m} de G_{n-m+1} corta al lugar en un punto o un conjunto numerable de puntos. Enunciemos ahora el lugar primitivo con la condición de estar las soluciones situadas en la variedad lineal G_{n-m} y hagamos lo mismo para todas las variedades de un haz $(G_{n-m})_i$ de G_{n-m+1}. Con ello habremos obtenido, por reiteración del criterio, la parte del lugar interferida en G_{n-m+1}. Así sucesivamente hasta E_n. De esta forma, por sucesivas generaciones, nos viene dado el lugar primitivo.

Por lo tanto, en adelante, nos referimos sólo a lugares de puntos por generación, y todo ello será general.

2. — Proponer un lugar geométrico es cosa, pues, bien fácil: basta plantear un problema cualquiera en un espacio E_n sobre entes dados, A, B, C, . . ., N, de modo que la solución sea un punto o un conjunto numerable de puntos. Hagamos ahora que A pertenezca a un sistema ∞^{α} de entes A; B a otro ∞^{β} de entes B; . . . ; N a un sistema ∞^{ν} de entes N. Tomemos en dichos sistemas sendos elementos, y resolvamos sobre ellos el problema dado, haciendo lo mismo para todos los grupos A, B, C, . . ., N. El conjunto de todos

los puntos obtenidos constituirá o no una o más variedades continuas de E_n, y será un lugar.

No es necesario asignar a cada ente primitivo un sistema para obtener un lugar geométrico: basta hacerlo con uno de ellos. Supongamos que son p los entes primitivos, de los cuales q tienen sistema. Puede suceder que, al resolver el problema matriz, no sea arbitraria la elección de elementos en los q sistemas, sino que, habiendo tomado arbitrariamente sendos entes en k de ellos, queden unívocamente determinados los $q-k$ elementos restantes en sus sistemas respectivos. Llamaremos *conjuntos-variables* a los sistemas en los que es arbitraria la elección de elementos.

En el tercero de los tres ejemplos puestos al principio, enunciado por generación, son entes dados constantes A y B; el haz plano de rectas de vértice A es conjunto-variable; el criterio de equidistancia referido a A y a B sobre cada recta r es el problema matriz, y E_2 el espacio lineal donde se sitúa el lugar.

Sea G el problema matriz de un l. g. en E_n y $A_1, A_2, \ldots, A_p$ los entes primitivos dados, de los cuales los q primeros pertenecen respectivamente a sistemas S_{A_1}, $S_{A_2}, \ldots, S_{A_q}$, que, para simplificar, suponemos que todos ellos son conjuntos-variables. Hemos de repetir G sobre cada grupo A_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$, tomando para esto de un modo arbitrario q elementos en los sistemas S. Si consideramos los grupos A_i de modo que no varíe sino A_1 en S_{A_1}, dejando fijos en sus sistemas respectivos a $A_2, A_3, \ldots, A_q$, el conjunto de los puntos obtenidos constituye un lugar parcial correspondiente al conjunto-variable S_{A_1}. El lugar total está formado, pues, por q sistemas incidentes de lugares parciales.

Cuando este lugar total es una variedad continua V de E_n, es claro que la dimensión de V será como máximo $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q$, siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ las dimensiones de los sistemas S_{A_i}. Entonces ha de acontecer dos cosas: 1.ª G es de tal índole que no reduce el número de dimensiones de los lugares parciales, es decir, éstos son variedades continuas cuyo número de dimensiones es igual a la dimensión de sus conjuntos-variables correspondientes. 2.ª La incidencia de los q sistemas de lugares parciales es de dimensión *cero*.

Las proposiciones contrarias constituyen las dos únicas causas que reducen el número de dimensiones del lugar geométrico total. Tenemos un caso particular de la segunda cuando es $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q > n$, o sea, cuando la dimensión del espacio E_n es insuficiente para contener la del lugar, no existiendo la causa primera.

La interpretación analítica de ambas causas que restringen la dimensión de V es también sumamente sencilla: sean $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_{\alpha_1}^{(1)}, y_1^{(2)}; y_2^{(2)}, \ldots, y_{\alpha_2}^{(2)}; \ldots; y_1^{(q)}, y_2^{(q)} \ldots, y_{\alpha_q}^{(q)}$ los parámetros arbitrarios esenciales que definen, respectivamente, los elementos o entes primitivos en los sistemas S_{A_1} $S_{A_2}, \ldots, S_{A_q}$. Las coordenadas (no homogéneas) de los puntos del lugar V serán funciones

$$x_\mu = \varphi_\mu \; (y_1^{(1)} \ldots, y_{\alpha_1}^{(1)}; y_1^{(2)} \ldots, y_{\alpha_2}^{(2)} \quad y_1^{(q)}; \ldots; y_{\alpha_q}^{(q)}) \qquad [1],$$

$$\mu = 1, \; 2, \ldots, \; n,$$

y constituyen las ecuaciones paramétricas de dicho lugar.

Si existe la primera de las causas enunciadas respecto de S_{A_1}, por ejemplo, es que en las funciones φ no son esenciales los parámetros $y_1^{(1)}, \ldots, y_1^{(1)}$, siendo, pues, posible sustituir todos o parte de ellos por otros parámetros en número menor.

2.ª La incidencia de los q sistemas de lugares parciales es de dimensión r, mayor que *cero*. Supongamos, para simplificar, que es r precisamente la dimensión de la incidencia de los sistemas de lugares parciales correspondientes a S_{A_1} y S_{A_2}. Entonces no cabe otra cosa que ser sustituibles los $\alpha_1 + \alpha_2$ parámetros $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ de [1] por $\alpha_1 + \alpha_2 - r$ nuevos parámetros, ya que el lugar parcial superior que resulta de considerar variables sólo a los entes primitivos A_1 y A_2 ha de ser una variedad de dicha dimensión $\alpha_1 + \alpha_2 - r$.

Vemos, por lo tanto, la existencia única de las causas referidas: que en las funciones φ no sean esenciales parte o todos los parámetros y de una misma serie; que no lo sean parte o todos los de series distintas, aun siéndolo los de cada serie.

En el primer caso, si llamamos $y'_1, y'_2, \ldots, y'_\beta$ $(\beta < \alpha_1)$ a los parámetros que sustituyen a los $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_{\alpha_1}^{(1)}$ en las φ, es, en general, posible sustituir también el sistema ∞^{α_1} S_{A_1} de entes A_1 por otro ∞^β de los mismos entes, definido con los y', de manera que junto con los q—1 sistemas restantes y los p—q elementos fijos se obtenga la misma variedad lugar. Es decir, los conjuntos-variables son reducibles a otros de dimensión menor.

Este caso encierra la posibilidad de quedar eliminados en las ecuaciones [1] algunos parámetros $y^{(J)}$.

La segunda causa de restricción del número de dimensiones del lugar V se produce cuando las posiciones relativas de los sistemas S_{A_1} en E_n no son genéricas y sí particulares. Al establecer las ecuaciones paramétricas [1] aparecen entonces, en cada una de las φ, funciones idénticas de los mismos parámetros *y* de series diferentes; y estas funciones, claro es, constituyen nuevos parámetros, en número menor.

Si se trata de la primera causa referida, por ejemplo, al conjunto-variable S_{A_1}, a todo punto de un lugar parcial respecto de S_{A_1} corresponde uno o más subsistemas de entes A_1 de dicho conjunto-variable. En cuanto a la segunda hay también correspondencias parecidas.

Si el lugar V tiene la máxima dimensión $\sum_{j=1}^{q} \alpha_j$, la correspondencia recíproca no es de puntos de V a continuos de entes primitivos.

3. — Para que un lugar de puntos sea una variedad continua de E_n, su dimensión m ha de cumplir $m \lesseqgtr n - 1$. Por otra parte, sabemos que el número de dimensiones de un lugar depende de la multiplicidad o dimensión de los sistemas de entes primitivos arbitrarios. Es posible, pues, proponer lugares de puntos que sean n-dimensionales en E_n, o sea, que constituyan recintos del espacio selectivo total.

Como vemos, el concepto de lugar geométrico es muy general, y, sin embargo, en geometría plana sólo es corriente estudiar aquellos lugares que son líneas o elementos de líneas. Es cierto que se puede proponer inmediatamente lugares de puntos que constituyen recintos del plano; pero son tan triviales que no merecen siquiera ser enunciados. A pesar de ello enunciemos dos:

1.º «L. g. de los puntos del plano cuya distancia a uno fijo es mayor que r y menor que k $(k > r)$».

2.º «L. g. de los puntos del plano homotéticos de los de un círculo dado C respecto de un punto fijo V (razón k)».

La puerilidad de estos lugares de puntos áreas en el plano consiste, para el primer ejemplo, en los conceptos *mayor* y *menor* que intervienen en el enunciado. Toda selección de puntos de un plano condicionada por varias limitaciones a un concepto simple de distancia, o a otro análogo simple, define, en efecto, un recinto, finito o infinito, de ese plano.

Este lugar lo es por síntesis. Si el campo selectivo lo restringimos a una recta del plano que pasa por el punto fijo obtenemos también otro *recinto* de ella.

En cuanto al segundo de los ejemplos, se trata, desde luego, de un lugar por generación: a cada punto del círculo dado corresponde uno homotético de razón k. Los datos para engendrar este lugar son el centro de homotecia — ente primitivo fijo — y el punto genérico del círculo — ente primitivo que pertenece a un sistema ∞^2 de ellos —. El problema matriz es el criterio de homotecia referido a cada ente de C respecto de V. Sabemos ya que el lugar ha de ser bidimensional, y, por lo tanto, un recinto del plano.

Cualquier lugar área de puntos en el plano que se genera aplicando un problema matriz sobre un grupo de p entes, de los cuales p — 1 son fijos y el otro varía en un campo ∞^2 de ellos; es, casi siempre, trivial. Pero, en cambio, no suelen ser ya pueriles los lugares, si, en vez de hacer variar a un ente primitivo sobre un campo o sistema ∞^2 de ellos, hacemos variar a dos arbitrariamente sobre sendos sistemas ∞^1. En nuestro último ejemplo, basta que el punto móvil de C varíe sólo en una circunferencia, y que el centro de homotecia se elija también arbitrariamente en otra línea cualquiera, para que el lugar área que resulte deje de ser trivial.

Es claro que, si un problema matriz en el plano se refiere a p puntos-datos, y hacemos variar sobre sendas líneas genéricas a más de dos de ellos de un modo arbitrario, se obtiene un lugar área de puntos; pero en los sistemas de lugares parciales ha de haber forzosamente incidencia de dimensión mayor que *cero*, por ser aquí $q > 2$ ($q =$ número de líneas conjuntos-variables); esto es, el lugar parcial superior que resulta de considerar variables sólo a dos puntos datos, y otro parcial correspondiente a otra de las líneas dadas, inciden según una línea.

En definitiva: la regla que nos permite proponer lugares de puntos áreas en el plano, exentos en general de trivialidad, consistirá, pues, en elegir un problema gráfico cuya solución sea un punto o conjunto numerable de puntos, y cuyos datos sean puntos (líneas) no inferiores a dos en número. Luego, haremos variar a dos de estos datos de una manera arbitraria, sobre sendas líneas (haces), repitiendo el problema elegido en cada nuevo grupo de datos.

Sean A y B los entes primitivos que son variables sobre los conjuntos ∞^1 S_A y S_B respectivamente. Un lugar parcial L_A correspondiente a S_A se obtendrá cuando B queda fijo en S_B y sólo varía A en S_A. L_A es un lugar línea corriente, y está perfectamente definido por el valor o posición que tiene B en S_B. A cada valor de B corresponde un L_A; de modo que si hallamos ahora el lugar geométrico de L_A, cuando B varía en su sistema, obtenemos el lugar total.

(Continuará)