BIBLIOGRAFIA

CARL B. BOYER, *The concepts of the Calculus. A critical and historical discussion of the Derivative and the Integral.* 16 × 23,5; 346 p. 22 fig. New York, Morningside Heights, Columbia University Press. 1939. $ 3,75.

La reseña histórica del Cálculo infinitesimal que figura en los tratados generales de historia de la matemática, además de estar ya muy anticuada, presenta graves deficiencias por reflejarse en ella la nacionalidad de sus autores, deseosos de elevar la gloria de aquél de los dos campeones máximos que merece sus simpatías. El lamentable espectáculo de la polémica que envenenó los orígenes del Cálculo, a partir de la feliz idea que tendió un puente entre derivada e integral, se ha prolongado hasta nuestros días con la parcialidad de los comentadores y era ya necesario que algún neutral emprendiera la revisión crítica de lo mucho publicado sobre el tema..en todos los países cultos.

El libro de BOYER no es obra de investigación original que aporte sensacionales novedades; pero por la metódica organización del abundante material y el sano criterio con que lo analiza, viene a ocupar un puesto vacío existente desde hace tiempo en la literatura histórica, en la cual, aparte los capítulos consagrados al tema en los tratados generales de historia de la matemática y del conocido libro de ZEUTHEN, que por abarcar aquel interesante período puede considerarse como tratado especial, no existía ningún estudio sistemático de la evolución de la idea infinitesimal desde la antigüedad hasta nuestros días, en que encuadrasen las más recientes investigaciones, promovidas por la aparición de nuevos códices griegos y por un estudio más detenido del material bibliográfico ya conocido.

He aquí la reseña de los diversos capítulos que componen la obra:

Cap. I. — En esta breve pero sustanciosa introducción de carácter general, se expone la evolución de la matemática a través de los siglos, haciendo resaltar muy claramente la profunda diferencia de concepto existente entre el infinitésimo actual, sobre el cual pretendieron edificar el cálculo sus fundadores y la noción de infinitésimo potencial, nacida de la idea de variabilidad y de límite, que a partir del siglo XIX sustituyó definitivamente a aquella. La exposición de BOYER revela clara comprensión, no frecuente en los historiadores, de las ideas capitales de la matemática actual, en su orientación abstracta.

Cap. II. — *La Edad antigua.* La dificultad de exponer la concepción infinitesimal en la antigüedad helénica radica en la abundancia de estudios sobre ella, que dificulta la adecuada selección. La crisis de las magnitudes inconmensurables, genialmente vencida por los pitagóricos de la primera época con la creación del número irracional, quizás inspirada en fuentes hindúes; la cubicación de la pirámide cuadrangular, debida a DEMÓCRITO, como se ha sabido modernamente, así como la aplicación del principio infinitesimal que mucho más tarde había de inmortalizar a CAVALIERI; las muy conocidas paradojas de ZENON; el significado de PLATON y de ARISTÓTELES, acompañado de luminoso análisis del infinito potencial y del infinito actual; la admirable teoría de las proporciones, genial creación de EUDOXIO, como también el método de exhaución, quizás previsto ya por HIPOCRATES DE CHIOS; un breve pero atinado resumen de los *Elementos* de EUCLIDES; la valoración justa de la grandiosa obra arquimediana, precursora del cálculo diferencial y del integral; éste es el índice de los más importantes asuntos tratados en este capítulo, con crítica en general ecuánime y certera de los juicios demasiado extremados de algunos historiadores.

Permítasenos, sin embargo, disentir del autor en su crítica dirigida a HOPPE, por haber afirmado, al referirse a las cuadraturas de ARQUIMEDES, que "por primera vez puede hablarse correctamente de una integración". La integral definida — arguye BOYER — se define en matemática como límite de una sucesión y no como suma de infinitos puntos, líneas o superficies".

Observaremos, por nuestra parte, que la diferencia entre sucesión y serie es meramente de forma y no de esencia; y que el moderno desarrollo de la teoría de la integración permite incluir sin esfuerzo en ella la concepción arquimediana, que considera el segmento parabólico como una suma de infinitos triángulos. Es obvio que en una época en que se estaba a más de dos mil años de distancia del concepto general de número real (concepto de que nos sentíamos orgullosos hasta que recientemente nos hemos dado cuenta de su inseguridad) sería excesiva exigencia la de un rigor aritmético, que ni siquiera hemos logrado hoy; pero no es hiperbólico afirmar que el siracusano sobrepasó el estrecho concepto de integral del siglo XIX (CAUCHY y RIEMANN) introduciendo la noción de aditividad infinita, que preside la teoría de la integral en nuestro siglo. No echemos de menos la clara noción de límite, que sólo después de 21 siglos se había de introducir en el concepto de integral, pues no se olvide que posteriormente se propende a sustituirla por otras; y reconózcase que la intuición arquimediana de "suma de infinitos sumandos" es la misma que hoy unimos a la misma frase, la cual no exige la idea de límite, sino de extremo superior de las diversas sumas finitas parciales; y es deber de justicia proclamar que la descomposición efectuada por el máximo genio griego del segmento parabólico en suma de infinitos triángulos, no difiere en esencia de la que hoy efectuamos para evaluar el área de un recinto abierto, descomponiéndolo en suma de infinitos rectángulos que agotan los puntos del recinto, es decir, con la misma frase suya, producen la *exhaución* del recinto.

Cap. III. — La contribución medioeval. Inmensa en el tiempo, pero de pobre densidad, es la aportación de los siglos medios a ésta, como a todas las ciencias positivas; pero no puede menos de admirarse la agudeza de los escritores escolásticos que, preocupados con más hondos e inaccesibles problemas, trataban incidentalmente cuestiones de análisis infinitesimal.

El francés ORESME y el inglés SUISETH (más conocido por el *Calculator*) lograron sumar series no geométricas mediante artificios ingeniosos; y no podía faltar la cita de ALVARO THOMAS (el autor omite que era portugués, aunque profesó en París) que perfeccionó los métodos, avanzando sobre sus predecesores y deteniéndose solamente al tropezar con series de tipo logarítmico, pero saliendo habilidosamente del trance, como en otro lugar hemos expuesto [1].

---

(1) *Los matemáticos españoles del siglo XVI.* Madrid, 1926.

Que estos escolásticos conocían perfectamente el movimiento uniformemente acelerado, es evidente leyendo la ingente obra de ALVARO THOMAS titulada *De triplice motu*; y también es cosa probada que GALILEO se inspiró en ellos al encontrar la expresión matemática de la caída de los graves.

Cap. IV y V. — Un siglo de precursores. — Newton y Leibniz. No podemos detenernos en la exposición minuciosa de las diversas aportaciones al método infinitesimal debidas a COMMANDINO, STEVIN, VALERIO, KEPLER, GALILEO, CAVALIERI, GULDIN, TORRICELLI, ROBERVAL, FERMAT, GREGORIO DE SAN VICENTIO, TACQUET, PASCAL, WALLIS, GREGORY, HUYGENS,... Muchas de estas contribuciones, si bien interesantes en sí mismas, no significan progreso metodológico sobre la concepción arquimediana del área de un recinto como suma de las áreas de infinitas figuras elementales; el cálculo integral habría quedado estancado poco más allá de donde lo dejó ARQUIMEDES, si cada cuadratura hubiera exigido el doble proceso de sumación y de paso al límite. Que estos insignes matemáticos avanzaran un paso más, pasando de la sumación de cuadrados a la de las potencias n-simas, aun significando un resultado interesante, no representa ni siquiera un atisbo de lo que pronto había de ser el cálculo integral. La idea feliz de BARROW, que descubrió la reciprocidad entre el problema inverso de la tangente (o sea el cálculo de la función primitiva) y el problema de la cuadratura, fué la llave que abrió las puertas a la nueva disciplina, en las diestras manos de NEWTON y de LEIBNIZ. Que el método de BARROW fuera geométrico y no algorítmico, y que apenas descubierto el puente de unión entre ambos problemas, renunciara a la rica cosecha (que probablemente no presintió) para consagrarse a la teología, lejos de empequeñecer la figura del maestro de NEWTON la agiganta y bien puede considerársele en justicia como el fundador del moderno cálculo integral. Habríamos deseado que el autor expresase con el debido énfasis la trascendencia de esta idea en la cual confluyen dos grandes corrientes de pensamiento, de cuya cópula dimana la magna construcción realizada por los dos colosos del cálculo infinitesimal.

La reseña de la inmensa obra de NEWTON y de LEIBNIZ es excelente y el joven autor ha tenido el buen gusto de no entrar en las desagradables incidencias de la famosa polémica en que otros historiadores parecen complacerse. Todavía habría sido preferible omitir la cita de un intemperante párrafo de HATHAWAY, que figura en una nota. Creemos por nuestra parte que el punto fundamental discutido, o sea la paternidad de la relación entre primitiva é integral, pierde importancia en vista de que ambos contendientes conocían la obra de BARROW y les bastó sustituir su demostración geométrica por otra algorítmica, para llegar separadamente al mismo resultado.

Por otra parte, las dos obras se completan con caracteres distintos; mientras las derivadas proceden de las *fluxiones* de NEWTON, el cálculo estrictamente diferencial es el de LEIBNIZ; la integral definida es la *omnia* de éste, mientras que la integral indefinida, o mas bien la primitiva, procede de NEWTON. La exposición del genial físico es muy imperfecta metodológicamente, como obra de quien ve en ella un medio y no un fin, y su famosa *o* que en esencia es el *conato* de HOBBES, es netamente metafísica; mientras que LEIBNIZ aborda con criterio de filósofo lógico y no metafísico el encadenamiento y rigor de los conceptos. El predominio de la gloria de NEWTON en Inglaterra y Francia fué la causa de la oscuridad conceptual que ha encubierto los fundamentos del cálculo en casi todos los países, hasta muy entrado el siglo XIX, y que todavía se nota en los libros destinados a los cultivadores de las ciencias aplicadas.

Cap. VI y VII. — Períodos de indecisión y de rigor. Así titula el autor al período que termina LACROIX y al que inicia BOLZANO. En el primero reseña las duras críticas de BERKELEY al cálculo de NEWTON y los titubeos ante la nueva doctrina, que al fin arraiga en el continente y produce la espléndida floración que culmina en la magna obra de los BERNOULLI y de EULER. La famosa frase de D'ALEMBERT "allez en avant et la foi vous viendra" puede tomarse como característica de este áureo período que cierra el tratado didáctico de LACROIX, en el que se han venido inspirando muchos otros, aun después de la renovación del análisis por obra de CAUCHY, ABEL y finalmente de WEIERSTRASS y DEDEKIND al lado de los cuales, y a su misma altura, es preciso colocar al genial BOLZANO, que antes que todos ellos realizó por sí solo la renovación de los fundamentos sobre rigurosa base aritmética, prescindiendo de la peligrosa e insegura intuición espacial.

La omisión del nombre de MENGOLI (también insigne figura, desconocida de los tratadistas) en la reseña del concepto de integral, es la más grave laguna que hemos encontrado en la erudita obra que comentamos.

A la teoría de conjuntos de CANTOR y a los problemas que plantea la crítica actual de los fundamentos están consagradas las últimas páginas de la obra, cuyo capítulo final efectúa una síntesis comparativa de las ideas generales que han presidido el progreso del análisis, haciendo discretas observaciones sobre el prurito de muchos historiadores, empeñados en atribuir las grandes creaciones al genio de algunas figuras solitarias, cuya indiscutible superioridad radica casi siempre en haber llegado en el momento de madurez de las fecundas ideas lanzadas por numerosos antecesores, acertando a sistematizarlas y a extraer su máxima sustancia, gracias a una larga vida de esfuerzo tenaz, acompañado, claro es, de preclara inteligencia. Hay en esta tendencia al latifundismo intelectual mucho de comodidad por parte de los expositores, que asi rotulan los diversos descubrimientos con nombres propios, casi nunca con entera justicia; hay también mucho de inercia, que explica la persistencia de denominaciones a todas luces arbitrarias; y hay finalmente falta de honradez en los tratadistas que lanzan afirmaciones, a veces propias y con más frecuencia ajenas, sin puntualizar el origen de cada una, para que el lector pueda asignar a cada una el coeficiente o peso que le corresponda. Este imperativo de honestidad histórica, que evitaría la repetición indefinida de los graves errores e injusticias que ruedan de unos a otros trabajos, está fielmente respetado en la obra de BOYER y merece alto elogio la escrupulosidad con que aduce el fundamento de cada afirmación, dando lo cierto como cierto, lo dudoso como dudoso, y acompañando a cada idea no personal la exacta cita del lugar en que ha sido emitida. Sirva tal ejemplo de modelo a los historiadores de toda especie y se simplificará la difícil tarea de quienes ansiosos de lograr una exacta filiación de las ideas o de los hechos, consagran su vida a la crítica de la historia.

Buenos Aires, Universidad.

JULIO REY PASTOR