SOBRE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS Y CIERTAS PRIMITIVAS DE LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

por José Babini

---

1. *Relación de simetría.* —

Si con D^s_n indicamos las derivadas de orden s de $\frac{(x^2-1)^n}{2^n n!}$ (n natural), tendremos, incrementando por Taylor y directamente:

$$\sum_{s=0}^{2n} \frac{h^s}{s!} D^s_n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} (x^2-1)^{n-r} h^r (2x+h)^r$$

$$= \frac{1}{2^n n!} \sum_{r=0}^{n} \sum_{m=0}^{r} \binom{n}{r} \binom{r}{m} (x^2-1)^{n-r} h^{r+m} (2x)^{r-m}$$

de donde

$$s \leqq n; \quad \frac{D^s_n}{s!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geqq \frac{s}{2}}^{s} \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2-1)^{n-r} (2x)^{2r-s}$$

$$s \geqq n; \quad \frac{D^s_n}{s!} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geqq \frac{s}{2}}^{n} \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2-1)^{n-r} (2x)^{2r-s}$$

Si, en esta última fórmula, se cambia s por $2n-s$ y r por $n-s+r$

$$s \leqq n; \quad \frac{D^{2n-s}_n}{\lfloor 2n-s} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{r \geqq \frac{s}{2}}^{s} \binom{n}{s-r} \binom{n-s+r}{n-r} (x^2-1)^{s-r} (2x)^{2r-s}$$

$$= \frac{(x^2-1)^{s-n}}{2^n n!} \sum_{r \geqq \frac{s}{2}}^{s} \binom{n}{r} \binom{r}{s-r} (x^2-1)^{n-r} (2x)^{2r-s} = (x^2-1)^{s-n} \frac{D^s_n}{s!}$$

Si ahora recordamos que $D^n{}_n$ no es más que el polinomio de Legendre P_n e indicamos con $P_n{}^r$; $(-n \leqq r \leqq n)$ las derivadas $(r > o)$ y ciertas primitivas $(r < o)$ de ese polinomio, llegaremos, haciendo $s = n + r$ a la siguiente *relación de simetría*

$$\frac{P_n^{-r}}{\underline{|n-r}} = (x^2 - 1)^r \frac{P_n^r}{\underline{|n+r}} \qquad [1]$$

válida para $-n \leqq r \leqq n$.

Esta relación nos dice que las primitivas que entran en juego son los polinomios que admiten los valores -1 y 1; como ceros de orden r de multiplicidad (1).

2. *Generalización de una expresión de Dirichlet.* —

Es conocida una fórmula de Dirichlet (2) que expresa P_n en función de $u = \cos\frac{\Phi}{2}$ y $v = \operatorname{sen}\frac{\Phi}{2}$; siendo $x = \cos\Phi = 2u^2 - 1 = 1 - 2v^2$.

Para extenderla a $P^r{}_n$, que es un polinomio de grado $n - r$ en x escribamos

$$P^r{}_n = \sum_{m=o}^{n-r} \varphi(n-r, m) \,.\, u^{2(n-r-m)}\, v^{2m}$$

donde $\varphi(n-r, m)$ es un símbolo numérico con dos índices. Diferenciando y considerando que $dx = 4\,u\,du = -4\,v\,dv$,

$$P_n{}^{r+1}\,dx = \sum_{m=o}^{n-r} \varphi(n-r, m)\, u^{2(n-r-m)}\, v^{2m} \left[\frac{n-r-m}{2\,u^2} - \frac{m}{2\,v^2}\right] dx$$

de donde

$$P_n{}^{r+1} = \sum_{m=o}^{n-r-1} \varphi(n-r-1, m)\, u^{2(n-r-1-m)}\, v^{2m} =$$

(1) El profesor Toscano, de Messina, ha tenido la amabilidad de comunicarme que la relación de simetría puede obtenerse también partiendo de los polinomios de GEGENBAUER.

(2) Véase, por ejemplo: W. LÁSKA, Sammlung von Formeln... Pag. 384.

$$\frac{1}{2}\sum_{m=o}^{n-r-1}\left[(n-r-m)\,\varphi(n-r,m)-\right.$$

$$\left.-(m+1)\,\varphi(n-r,m+1)\right]u^{2(n-r-1-m)}\,v^{2m}\ ;$$

y, por lo tanto, el símbolo $\varphi(n-r,m)$ satisface la siguiente relación recurrente:

$$2\,\varphi(n-r-1,m)=(n-r-m)\,\varphi(n-r,m)-$$
$$-(m+1)\,\varphi(n-r,m+1)\ ;$$

que, mediante el cambio de símbolo

$$\varphi(n-r,m)=\frac{(-1)^{n-r}\cdot 2^{\,n-r}}{\underline{|n-r-m}\cdot\underline{|m}}\,\psi(n-r,m)$$

se convierte en

$$\psi(n-r-1,m)=\psi(n-r,m+1)-\psi(n-r,m)=$$
$$=\Delta\psi(n-r,m)\ ;\qquad \Delta m=1\ ;$$

y en general

$$\psi(n-r,m)=\Delta^{p}\,\psi(n-r+p,m)=$$

$$\sum_{s=o}^{p}\binom{p}{s}(-1)^{s}\,\psi(n-r+p,m+p-s).$$

Como

$$P_{n}^{-n}=\frac{(x^2-1)^n}{2^n\,n!}=\frac{2^n\,(-1)^n}{n!}\,(u\,v)^{2n}$$

serán

$$m=n;\quad \varphi(2n,m)=\frac{2^n\,(-1)^n}{n!},\qquad\qquad \psi(2n,m)=\frac{(-1)^n\,n!}{2^n},$$

$$m\neq n;\quad \varphi(2n,m)=\psi(2n,m)=o$$

y por lo tanto, si en la sumatoria anterior se hace $p = r + n$ el único término no nulo será cuando $s = r + m$, de donde

$$\psi(n-r, m) = \binom{n+r}{m+r}(-1)^{m+r}\frac{(-1)^n n!}{2^n} =$$

$$= \frac{|\underline{n-r-m}\;|\underline{m}}{2^{n-r}}(-1)^{n-r}\varphi(n-r, m),$$

$$\varphi(n-r, m) = \frac{|\underline{n+r}}{n!\,2^r}(-1)^m\binom{n}{m}\binom{n}{m+r};$$

y finalmente

$$P_n{}^r = \frac{|\underline{n+r}}{2^r\; n!}\sum_{m+m'=n-r}\binom{n}{m}\binom{n}{m'}(-1)^m u^{2m} v^{2m'} \qquad [2]$$

que es la generalización de la fórmula de Dirichlet, a la cual se reduce para $r = 0$. Separando las derivadas de las primitivas, tenemos para $r \geqq 0$,

$$P_n{}^r = \frac{|\underline{n+r}}{2^r\,.\,n!}\sum_{m=0}^{n-r}\binom{n}{m}\binom{n}{m+r}(-1)^m u^{2(n-r-m)}\; v^{2m}$$

$$P_n{}^{-r} = \frac{|\underline{n-r}\,.\,2^r}{n!}\sum_{m=r}^{n}\binom{n}{m}\binom{n}{m-r}(-1)^m u^{2(n+r-m)}\; v^{2m};$$

y cambiando en esta última m por $m + r$

$$\frac{P_n^{-r}}{|\underline{n-r}} = \frac{2^r}{n!}\sum_{m=0}^{n-r}\binom{n}{m+r}\binom{n}{m}(-1)^{m+r}u^{2(n-m)}v^{2(m+r)} =$$

$$= (-1)^r(2uv)^{2r}\frac{P_n^r}{|\underline{n+r}}$$

y como $(-1)^r(2uv)^{2r} = (x^2 - 1)^r$ resulta nuevamente la relación de simetría.

3. *Relaciones recurrentes.* —

Entre las numerosas relaciones recurrentes que pueden establecerse entre las $P_n{}^r$ veremos únicamente las generalizaciones de las más conocidas relaciones recurrentes entre las P_n.

De

$$P_n^r = D_n^{n+r} = D^{n+r}\,\frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,|\underline{n-1}} \cdot \frac{x^2-1}{2n} = \frac{x^2-1}{2n}\,D_{n-1}^{n+r} +$$

$$+\frac{x\,(n+r)}{n}\,D_{n-1}^{n+r-1} + \frac{(n+r)\,(n+r-1)}{2n}\,D_{n-1}^{n+r-2}$$

$$2n\,P_n^r = (x^2-1)\,P_{n-1}^{r+1} + 2x\,(n+r)\,P_{n-1}^r +$$

$$+(n+r)\,(n+r-1)\,P_{n-1}^{r-1}\,. \qquad [3]$$

De

$$D'_n = D\,\frac{(x^2-1)^n}{2^n\,n!} = x\,\frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,|\underline{n-1}}$$

$$D_n^{n+r} = D^{n+r-1}\,x\,\frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,|\underline{n-1}} = x\,D_{n-1}^{n+r-1} + (n+r-1)\,D_{n-1}^{n+r-2}$$

$$P_n^r = x\,P_{n-1}^r + (n+r-1)\,P_{n-1}^{r-1}. \qquad [4]$$

De

$$D^2{}_n = D\,x\,\frac{(x^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,|\underline{n-1}} = D^0{}_{n-1} + x^2\,\frac{(x^2-1)^{n-2}}{2^{n-2}\,|\underline{n-1}}$$

$$= (2n-1)\,D^0{}_{n-1} + D^0{}_{n-2}$$

$$D_n^{n+r} = (2n-1)\,D_{n-1}^{n+r-2} + D_{n-2}^{n+r-2}$$

$$P^r{}_n = (2n-1)\,P_{n-1}^{r-1} + P^r{}_{n-2} \qquad [5]$$

4. *Expresión de* P_n^r *por determinantes.* —

Si eliminamos P_{n-1}^{r-1} entre [4] y [5]

$$(n+r-1)\,P^r{}_{n-2} - x\,(2n-1)\,P^r{}_{n-1} + (n-r)\,P^r{}_n = 0$$

que, para $r \geqq 0$, haciendo $n = r+1,\ r+2,\ \ldots n.$

se obtiene

$$(-1)^{n-r-1}\,\underline{|n-r}\,P_n^r = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & x\,(2r+1)\,P_r^r \\ x\,(2r+3) & 2 & 0 & \dots & 0 & (2r+1)\,P_r^r \\ 2r+2 & x\,(2r+5) & 3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2r+3 & x\,(2r+7) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x\,(2n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

y como $P_r^r = (2r-1)!!$

$$P_n^r = \frac{(2r-1)!!}{\underline{|n-r}} \begin{vmatrix} x\,(2r+1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2r+1 & x\,(2r+3) & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x\,(2n-1) \end{vmatrix} \quad ; \qquad [6]$$

y utilizando la relación de simetría se puede también expresar mediante un determinante las primitivas P_n^{-r}.

5. *Ecuación diferencial.* —

Si eliminamos P_n^r entre [3] y [4] y cambiamos r y n por $r+1$ y $n+1$,

$$(1-x^2)\,P_n^{r+2} - 2x\,(r+1)\,P_n^{r+1} + (n-r)(n+r+1)\,P_n^r = 0.$$

lo que nos dice que la ecuación diferencial

$$(1-x^2)\,y'' - 2x\,(r+1)\,y' + (n-r)\,(n+r+1)\,y = 0 \qquad [7]$$

tiene como integral particular P_n^r, de donde la integral general será, utilizando la relación de simetría

$$y = A\,P_n^r \int_B^x \frac{dt}{(1-t^2)\,P_n^r\;P_n^{-r}}$$

siendo *A* y *B* las constantes de integración.

(Original recibido en 1937)