SOBRE UNA CUESTION DE LA MEDIDA DE CONJUNTOS

(Tema Nº 4. Rev. U. M. A. VII, pág. 26)

¿Existe en cada intervalo algún conjunto parcial de medida menor que él y tal que los conjuntos parciales contenidos en intervalos iguales tengan iguales medidas?

He aquí la respuesta: cualquier conjunto de medida nula es evidentemente una solución del problema.

Si al conjunto se le impone la condición, tácitamente supuesta, de ser de medida no nula, el problema no tiene solución; esto puede deducirse como una consecuencia del teorema de Lebesgue, que dice que en casi todos los puntos de un conjunto medible la densidad es igual a uno. Nosotros vamos a demostrarlo utilizando solamente la definición de la medida de conjuntos.

En efecto, consideremos, para fijar las ideas, el intervalo $(0, 1)$ y supongamos que en él exista un conjunto E que cumpla las dos condiciones siguientes:

a) $0 < m(E) < 1$

b) Si I_1 e I_2 son dos intervalos iguales se verifica que $m(E \times I_1) = m(E \times I_2)$.

Es evidente que también se verifica la condición:

c) Si I_1 e I_2 son intervalos sin punto común y es $I = I_1 + I_2$, se verifica que $m(E \,.\, I) = m(E \,.\, I_1) + m(E \,.\, I_2)$.

Luego también se verifica la condición:

d) Cualquiera que sea el intervalo I se verifica:

$\frac{m(E \,.\, I)}{m(I)} = k$, siendo k una constante tal que $0 < k \leqq 1$.

Por ser E medible existe un conjunto abierto O que contiene a E y tal que

$[1]\; m(O) < m(E) + \varepsilon$ (ε arbitrariamente pequeño)

Por ser O un conjunto abierto se verifica que $O = \Sigma I_n$, donde los I_n son intervalos no rampantes.

Se verifica teniendo en cuenta d) que

$$\frac{m(E \cdot I_n)}{m(I_n)} = k \text{ y por tanto } \frac{\Sigma m(E \cdot I_n)}{\Sigma m(I_n)} = k$$

Pero por estar E contenido en $\Sigma (E \cdot I_n) = (E)$ y como $\Sigma m(I_n) = m(O)$ se verifica que

$$[2] \quad \frac{m(E)}{m(O)} = k \qquad (0 < k < 1)$$

Las condiciones [1] y [2] son incompatibles, luego está demostrada la cuestión.

Manuel Balanzat

NOTA: Otra solución esencialmente equivalente ha sido presentada por Yanny Frenkel, en conexión con problemas mucho más generales. El trabajo se publicará en otro número.

SOBRE LA INVERSION DE LA SERIE

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x}{x^2+n^2}$$

(Tema Nº 3. Rev. U. M. A. VII, pág. 26)

Para que el desarrollo de f(x) en serie de tal tipo sea posible, hay que suponer que la función real f(x) admita una «prolongación analítica» en el campo complejo, y que no posea otras singularidades que, eventualmente, polos de primer orden en los puntos ri $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

El desarrollo:

$$f(x) = \frac{c_0}{x} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_n}{x+ni} + \frac{c_n}{x-ni} \right)$$