SOBRE UN PROBLEMA DE PROBABILIDADES GEOMETRICAS

(Tema Nº 5, pág. 26)

Dados al azar dos pares de puntos XY, ZT, sobre el contorno de un polígono convexo, calcular la probabilidad de que el punto de intersección de las rectas que determinan, sea interior al polígono.

Solución:

Supongamos el par XY fijo en los lados a_i, a_k y consideremos la medida de los casos favorables para el par ZT.

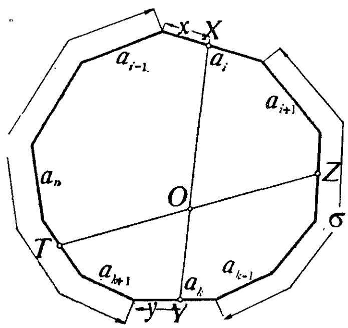
Fijado Z, ya sea en a_{i+1}, o en $a_{i+2}, \ldots$ o en a_{k-1}, la medida de los casos favorables para T es:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + x + y$$

siendo x e y las abscisas de X, Y sobre los lados a_i, a_k respectivamente.

Haciendo variar Z desde a_{i+1} hasta a_{k-1}, obtenemos:

$$m_1(ZT) = (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + x + y)$$
$$(a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{k-1}).$$



Fijemos ahora Z en $a_i - x$; la medida del conjunto de posiciones favorables de T es:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + y$$

y al variar Z en $a_i - x$ resulta:

$$m_2(ZT) = (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + y)(a_i - x).$$

Finalmente, si fijamos Z en $a_k - y$, obtenemos como medida de los casos favorables para T:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + x$$

y como Z puede variar en $a_k - y$, es:

$$m_3(ZT) = (a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} + x)(a_k - y).$$

Por tanto, la medida de todos los casos favorables para el par ZT habiendo fijado previamente el par XY, es:

$$m(ZT) = m_1(ZT) + m_2(ZT) + m_3(ZT) =$$

$$= (a_{k+1} + \ldots + a_{i-1} + x + y)(a_{i+1} + \ldots + a_{k-1}) +$$
$$+ (a_{k+1} + \ldots + a_{i-1} + y)(a_i - x) +$$
$$+ (a_{k+1} + \ldots + a_{i-1} + x)(a_k - y)$$

o bien si ponemos:

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{i-1} = s$$
$$a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{k-1} = \sigma$$

tenemos:

$$m(ZT) = (s + x + y)\sigma + (s + y)(a_i - x) + (s + x)(a_k - y)$$

y efectuando operaciones:

$$m(ZT) = x(\sigma - s + a_k) + y(\sigma - s + a_i) - 2xy + s(\sigma + a_i + a_k).$$

Hagamos variar ahora el par XY, primero en los lados en que lo suponíamos fijo y luego en todo el perímetro:

$$m(XYZT) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_0^{a_i} \int_0^{a_k} [x(\sigma - s + a_k) + y(\sigma - s + a_i) -$$
$$- 2xy + s(\sigma + a_i + a_k)]\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{a^2_i\, a_k}{2} (\sigma - s) + \frac{a_i\, a^2_k}{2} (\sigma - s + a_\cdot) + \right.$$

$$\left. + s\, a_k\, a_i\, (\sigma + a_i + a_k) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\sigma + s}{2}\right) (a_i^2\, a_k + a_i\, a_k^2) + \frac{a^2_i\, a^2{}_k}{2} + s\, \sigma\, a_i\, a_k \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(a_{i+1} + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_{i-1})}{2} (a_i^2\, a_k + \right.$$

$$+ a_i\, a_k^2) + \frac{a^2_i\, a^2{}_k}{2} + (a_{i+1} + \ldots + a_{k-1})$$

$$\left. (a_{k+1} + \ldots + a_{i-1})\, a_i\, a_k \right]$$

pero, por ser:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(a_{i+1} + \ldots + a_{k-1} + a_{k+1} + \ldots + a_{i-1})}{2} (a_i^2\, a_k + a_i\, a_k^2) = 2\, \frac{S_{2,1,1}}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{a^2_i\, a^2{}_k}{2} = \frac{S_{2,2}}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{i+1} + \ldots + a_{k-1})\,(a_{k+1} + \ldots + a_{i-1})\, a_i\, a_k = 2\, S_{1,1,1,1}$$

es, por tanto:

$$m\,(XYZT) = \frac{1}{2}\, S_{2,2} + S_{2,1,1} + 2 S_{1,1,1,1}$$

y además, como es:

$$\frac{1}{2} [S_{1,1}]^2 = \frac{1}{2}\, S_{2,2} + \frac{2}{2}\, S_{2,1,1} + \frac{6}{2}\, S_{1,1,1,1}$$

resulta:

$$m\,(XYZT) = \frac{1}{2}\, [S_{1,1}]^2 - S_{1,1,1,1}$$

La medida de todos los pares es:

$$\frac{\text{per.}^2}{2} \cdot \frac{\text{per.}^2}{2} = \frac{\text{per.}^4}{4} = \frac{[S_1]^4}{4} = \frac{S_4 + 4S_{3,1} + 6S_{2,2} + 12S_{2,1,1} + 24S_{1,1,1,1}}{4}$$

puesto que cada par XY, ZT se obtiene dos veces; luego, la probabilidad buscada es:

$$p = \frac{\frac{1}{2}[S_{1,1}]^2 - S_{1,1,1,1}}{\frac{1}{4}[S_1]^4} = \frac{2[S_{1,1}]^2 - 4S_{1,1,1,1}}{[S_1]^4}$$

En particular, para el triángulo resulta:

$$p = \frac{2\,[a_1\,a_2 + a_1\,a_3 + a_2\,a_3]^2}{[a_1 + a_2 + a_3]^4}$$

y para el cuadrilátero el resultado coincide con el que figura en la obra de Czuber, «Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte» (Traducción de Schuerman, 1902, pág. 32).

Elba R. Raimondi

TEMAS PROPUESTOS

31.—Se sabe que en la teoría de probabilidades geométricas la posición de una recta G del plano se determina por su distancia p a un punto fijo O y el ángulo φ que la normal a la recta desde O forma con una dirección fija. Además, para medir un conjunto de rectas se toma la integral doble de la expresión $dG = dp\,d\varphi$ que se llama la *densidad de rectas*.

Sentado esto, consideremos una figura plana convexa K. Llamemos σ a la longitud de la cuerda que la recta G determina en ella y α_1, α_2 los ángulos (menores que π) que G forma con las tangentes a K en los extremos de dicha cuerda. Suponiendo que el contorno de la figura K tiene en todo punto tangente determinada y que carece de segmentos rectilíneos, demostrar que

$$\int \frac{\sigma}{\operatorname{sen}\alpha_1\ \operatorname{sen}\alpha_2}\, dG = \frac{1}{2}\, L^2$$

siendo L la longitud de K y estando la integración extendida a todas las rectas G que cortan a K.

L. A. Santaló