CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

Nº. 8. Un cazador parte del punto A y camina 10 km. hacia el Sur; como allí no encuentra caza, camina un rato hacia el Este, mata un oso y regresa en línea recta hacia el punto A, caminando 10 km. ¿De qué color era el oso?

1ª. *Solución.* Al caminar hacia el Sur, el cazador se mueve sobre un meridiano y al ir hacia el Este describirá un camino perpendicular al mismo, o sea un paralelo. Si el cazador describe todo el paralelo, suponiendo la longitud del mismo de más o menos 10 km., se trataría del paralelo de latitud Sur 89° 59' 16''; el cazador se encontraría, al partir, a 10 km. al Norte de este paralelo, o sea en la región polar austral donde hay solamente osos blancos.

Si el cazador no describe todo un paralelo se tiene que el punto B donde mata al oso, y también el C por distar 10 km. de A están sobre el círculo menor de centro A y radio 10 km. Además, en el punto B, dicho círculo menor y el paralelo determinado por B y C que describe el cazador, son tangentes; luego el círculo menor y el paralelo deben coincidir y A es por tanto uno de los polos. Como se habla de ir hacia el S., este polo debe ser el Norte y como en él sólo hay osos blancos, éste será también en este caso el color del oso cazado.

María M. Silva
(2º año del Inst. N. del Profesorado, Bs. Aires)

2ª. *Solución.* El cazador sale de A. Camina 10 km. hacia el Sur (es decir, por un meridiano) hasta B, luego recorre cierto trecho hacia el Este, hasta el punto C desde donde vuelve al punto de partida, caminando 10 km.

1°. Si $B = C$ (el cazador recorre todo el paralelo) es fácil saber el color del oso averiguando la latitud del lugar mediante la fórmula conocida $\varphi = \arc\cos \frac{l}{2\pi R}$, siendo l la longitud del paralelo o camino recorrido hacia el Este y R el radio terrestre. Si, por ejemplo, es $l = 20$ km., que es ya una longitud considerable para recorrerla en «un rato» como dice el problema, resulta $\varphi = 89° 58' 10''$. El cazador está por tanto muy cerca de alguno de los polos, y el oso debe ser blanco.

2°. Si $B \neq C$, debemos encontrar el lugar geométrico de los puntos que equidistan de esos dos. Tal lugar es el plano mediatriz del segmento BC (que debe pasar por el centro de la Tierra y por A, ya que estos puntos cumplen la condición) y cuya traza en la Tierra es un meridiano. En la intersección de este meridiano con el que pasaba por B encontraremos el punto A que nos dirá el color del oso. Como los únicos puntos comunes a los meridianos son los polos, el punto de partida A debe ser uno de éstos; pero por las condiciones del enunciado debe ser el polo Norte. De aquí resulta que el oso tenía el pelaje blanco.

P. Sofía Nogués Acuña
(2º año de la Fac. de C. Exactas de B. Aires)

Otra elegante solución ha sido enviada por el Sr. Alfredo Calderón, alumno de la Fac. de Ingeniería de Buenos Aires.

Nº. 3. Calcular la suma de los infinitos segmentos obtenidos al proyectar un punto de un lado de un ángulo agudo sobre el otro, la proyección obtenida se proyecta sobre el primer lado, etc...

Generalizar el problema cuando la dirección de las proyecciones sobre cada lado no es perpendicular a él.

Solución. Para el primer caso, fig. 1, se observa que los triángulos sucesivos ABC, BCD, CDE, ... son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo agudo igual. Por consiguiente

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}=\frac{CD}{DE}=\frac{DE}{EF}=\dots$$

que demuestra que las longitudes de AB, BC, CD, DE, ... forman una progresión geométrica de razón $\frac{BC}{AB} < 1$. La suma es por tanto

$$S=\frac{AB}{1-\frac{BC}{AB}}=\frac{AB^2}{AB-BC}$$

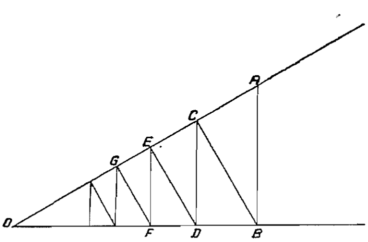

Fig. 1

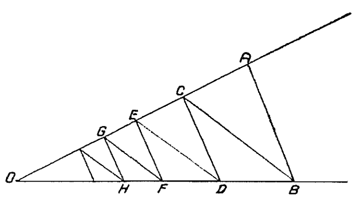

Fig. 2

Para la generalización, fig. 2, observemos que los triángulos ABC, CDE, EFG, ... son semejantes por tener los lados paralelos y por consiguiente

$$\frac{AB}{BC}=\frac{CD}{DE}=\frac{EF}{FG}=\dots \qquad (1)$$

y análogamente, por ser también semejantes los triángulos BCD, DEF, FGH, ... se tiene:

$$\frac{BC}{CD}=\frac{DE}{EF}=\frac{FG}{GH}=\dots \qquad (2).$$

Multiplicando (1) y (2) ordenadamente resulta

$$\frac{AB}{CD}=\frac{CD}{EF}=\frac{EF}{GH}=\dots$$

que nos dice que AB, CD, EF, ... forman una progresión geométrica de razón $\frac{CD}{AB}<1$. Por tanto

$$S_1=AB+CD+EF+\dots=\frac{AB}{1-\frac{CD}{AB}}=\frac{AB^2}{AB-CD}$$

Si en (1) se prescinde del primer término $\frac{AB}{BC}$ y las demás igualdades se multiplican ordenadamente por (2) resulta

$$\frac{BC}{DE}=\frac{DE}{FG}=\dots$$

lo cual prueba que BC, DE, FG, ... forman otra progresión geométrica de razón $\frac{DE}{BC}<1$; su suma valdrá pues

$$S_2=BC+DE+FG+\dots=\frac{BC}{1-\frac{DE}{BC}}=\frac{BC^2}{BC-DE}$$

La suma total vale por tanto

$$S=S_1+S_2=\frac{AB^2}{AB-CD}+\frac{BC^2}{BC-DE}$$

Arminda Domenech
(2º año del Inst. N. del Profesorado, Bs. Aires)