SOBRE UNA APLICACION DEL METODO DE CONDENSACION DE SINGULARIDADES

(Tema Nº 11, Vol. VII, pág. 27)

Se trata del problema siguiente:

Construir una función f(x) *con un conjunto denso de discontinuidades y que sea la derivada de otra función en todo un intervalo.*

La cuestión se presta a ser resuelta por el método de condensación de singularidades.

Para ello busquemos una función $f(x)$, que sea derivable en todo punto de un intervalo (a, b) y cuya derivada sea continua en todos los puntos del intervalo salvo en uno x_0. Consideremos un conjunto numerable y denso en todo el intervalo, representemos sus puntos por x_n y consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = f(x + x_0 - x_n).$$

La función $f_n(x)$ será derivable en todo punto del intervalo (a, b) y su derivada será continua en todo punto salvo en el x_n.

Multipliquemos estas funciones por números convenientes a_n de manera que la serie

$$\Sigma\, a_n f_n(x)$$

sea convergente y la serie derivada sea uniformemente convergente, esta última serie

$$\Sigma\, a_n f'_n(x)$$

nos dará la solución del problema.

Para aclarar más esta idea general, vamos a dar una solución concreta del problema. Consideremos la función

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{para } x \neq 0 \ \text{ y } \ f(0) = 0.$$

En todo punto distinto del $x = 0$, $f(x)$ admite como derivada

$$f'(x) = 2\, x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{para } x \neq 0,$$

para $x=0$ es

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}=0.$$

La función $f'(x)$ es evidentemente continua en todo punto $x\neq 0$; para $x=0$, la función presenta una discontinuidad de segunda clase.

Consideremos ahora la función, definida en el intervalo $(0, 1)$.

$$F(x)=\sum_{1}^{\infty} f_n(x), \qquad f_n(x)=\frac{1}{n!}(x-r_n)^2\operatorname{sen}\frac{1}{x-r_n}$$

siendo los r_n los números racionales del intervalo.

La serie de las $f_n(x)$ tiene sus términos menores en valor absoluto, cualquiera que sea x, que los de la serie cuyo término general es $\frac{1}{n!}$. La serie es pues convergente.

La derivada de $f_n(x)$ es

$$f'_n(x)=\frac{1}{n!}\left[2(x-r_n)^2\operatorname{sen}\frac{1}{x-r_n}-\cos\frac{1}{x-r_n}\right]\text{para } x\neq r_n$$

y

$$f'_n(r_n)=0$$

que como hemos visto es continua en todo punto salvo en el r_n.

La serie de las derivadas es uniformemente convergente, ya que sus términos son en valor absoluto menores, cualquiera que sea x, que los de la serie cuyo término general es $\frac{3}{n!}$. Luego la derivada $F'(x)$ será:

$$F'(x)=\sum_{1}^{\infty} f'_n(x).$$

Para cualquier punto irracional del intervalo $(0, 1)$ $F'(x)$ es continua puesto que las funciones $f'_n(x)$ son continuas en que hemos visto es continua en todo punto salvo en el r_n. dicho punto y la convergencia es uniforme.

En un punto racional r_p podemos descomponer a $F'(x)$ en la forma

$$F'(x) = f'_p(x) + \Sigma^{(p)} f'_n(x)$$

(el símbolo $\Sigma^{(p)}$ expresa que no figura el sumando de orden p).

El segundo sumando es una serie uniformemente convergente de funciones continuas en el punto r_p, luego es una función continua en dicho punto y como el primero $f'_n(x)$ es discontinuo en r_p, se deduce que $F'(x)$ es también discontinua en él.

$F'(x)$ es continua en todo punto irracional, discontinua en todo punto racional y es la derivada en todo punto de $F(x)$, luego es una solución del problema.

Manuel Balanzat

VARIA

9. *Sobre el método de Fredholm.*

"Los problemas de la físicamatemática se llevan, casi todos, a un tipo común. A Fredholm corresponde el mérito de haber encontrado un método general y riguroso que es aplicable a todos. Consiste, en último análisis, en tratar las ecuaciones integrales y diferenciales lineales como un sistema de una infinidad de ecuaciones de primer grado con una infinidad de incógnitas. Entonces la solución aparece como el cociente de dos expresiones, análogas a determinantes.

Estos determinantes se presentan, a su vez, en forma de series; el primer término de cada una de estas series es una integral simple, el segundo una integral doble y así sucesivamente. Aun cuando las series son extraordinariamente convergentes, aun cuando la ley de formación de los términos es elegante y simple, se presentan para el cálculo numérico, dificultades casi insuperables.

También el método de Fredholm, excelente para demostrar rigurosamente la posibilidad del problema lo que era considerado en ese entonces como extremadamente difícil, quizá excelente para descubrir ciertas propiedades analíticas de la solución, aun cuando en este aspecto no lo haya demostrado, no ha sido empleado por el cálculo numérico y no parece que se lo empleará en su forma actual."

Prefacio a "*H. Poincaré, Oeuvres*" de W. Ritz
Paris, 1911.