TEMAS RESUELTOS

10. — *Estudiar el recinto definido por la condición*

$$|1 - z| < k\,(1 - |z|)$$

que se presenta al estudiar la convergencia de las series de potencias en puntos del contorno del campo de convergencia.

A. S.

Solución. Se observa ante todo que, considerando el triángulo cuyos vértices son los puntos 0, z, 1 las longitudes de sus lados son $|1 - z|$, 1, $|z|$ y por tanto, para que exista el recinto del enunciado, como en todo triángulo cualquier lado es mayor que la diferencia de los otros dos, debe ser $|1 - z| > 1 - |z|$ y por tanto $k > 1$.

Tomemos el punto $z = 1$ como origen de un sistema de coordenadas polares. Poniendo $|1 - z| = \rho$ y $\varphi = \arg(1 - z)$ es

$$|z|^2 = \rho^2 + 1 - 2\rho\cos\varphi$$

y por tanto el recinto a estudiar está definido por

$$k - \rho > k|z|$$

o sea, elevando al cuadrado

$$k^2 + \rho^2 - 2k\rho > k^2(\rho^2 + 1 - 2\rho\cos\varphi)$$

de donde

$$\rho > \frac{2k - 2k^2\cos\varphi}{1 - k^2}. \qquad (1)$$

El recinto está pues limitado por la curva definida por

$$\rho = \frac{k^2}{1 - k^2}(1 - k\cos\varphi).$$

Esta curva, siendo $k > 1$, es ya muy fácil de representar. Es un caracol de Pascal. El recinto buscado, según (1), comprende la parte exterior al caracol más la parte interna al bucle interior.

E. S.