SOBRE EL COMPORTAMIENTO DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION ARMONICA EN EL CONTORNO

(Tema Nº 17, Vol. VII, pág. 28)

La propiedad de las funciones armónicas $u(x, y)$ de adquirir sus valores máximo y mínimo en el contorno se conserva en las derivadas parciales respecto de x y de y de cualquier orden, puesto que estas nuevas funciones son también armónicas.

En cambio, supuesto $\left|\frac{du}{ds}\right| < k$ siendo s el arco del contorno y k un número positivo, no se puede decir en general que la derivada en cualquier dirección esté acotada en el interior. Lo probaremos con el siguiente ejemplo:

La función $$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$

está definida en el círculo $|z| \leqq 1$ siendo además absolutamente convergente en este recinto.

Para $|z| < 1$, la función es analítica y por tanto la parte real armónica.

Esta función armónica toma en el contorno los valores

$$F(\vartheta) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n\vartheta}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi\vartheta}{2} + \frac{\vartheta^2}{4}.$$

En el contorno la función $F(\vartheta)$ es continua y acotada; y la derivada respecto de s (o de ϑ) está acotada.

Si consideramos en la superficie armónica $R[f(x)]$ la sección $x = 0$, se obtiene la curva $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ que tiene pendiente infinita para $x = 1$, puesto que su derivada según x vale $-\frac{1}{x}\log(1 - x)$.

Manuel Sadosky