TEMAS RESUELTOS

I. — *Estudiar la correspondencia siguiente*

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{2^i} \qquad y = \lim_{n \to \infty} 2^{-n} \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} k_i$$

siendo k_i *los números 0 y 1, es decir, las cifras del número racional* $0 \leq x \leq 1$, *expresado en el sistema de numeración de base 2.*

J. Babini

Solución: Siendo el número x racional, su desarrollo en el sistema de base 2 será periódico, es decir, será de la forma $0, A\,(k_1 k_2 k_3 \ldots k_p)$, siendo A el conjunto de cifras que forman la parte no periódica y $k_1 k_2 k_3 \ldots k_p$ el período. Sea m el número de cifras de que consta la parte no periódica A.

Demos a n un valor de la forma $n = m + \nu p + r$ (p es el número de cifras del período y r es un número entero $\leq p$). Llamando

$$Q = \frac{k_r}{2} + \frac{k_{r-1}}{2^2} + \ldots + \frac{k_1}{2^r} + \frac{k_p}{2^{r+1}} + \ldots + \frac{k_{k+1}}{2^p}$$

será

$$2^{-n} \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} k_i = Q + \frac{1}{2^p} Q + \frac{1}{2^{2p}} Q + \ldots + \frac{1}{2^{(\nu-1)p}} Q + \frac{k_r}{2^{\nu p+1}} +$$

$$+ \frac{k_{r-1}}{2^{\nu p+2}} + \ldots + \frac{k_1}{2^{\nu p+r}} + \frac{1}{2^n} A$$

y cuando $\nu \to \infty$ (y por tanto n crece también infinitamente) esta expresión tiende al número racional

$$0, (k_r k_{r-1} \ldots k_1\, k_p \ldots k_{r+1}) = Q\left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} + \ldots\right) = Q\,\frac{2^p}{2^p - 1}$$

cuyo desarrollo es periódico puro. Dando a r sucesivamente los valores 1, 2, 3, ..., p se obtienen por tanto p valores límites distintos (límites de oscilación), a saber

$$y_1 = 0, (k_1 k_2 k_3 \ldots k_p), \quad y_2 = 0, (k_2 k_3 k_4 \ldots k_1), \quad \ldots,$$
$$y_p = 0, (k_p k_1 k_2 \ldots k_{p-1}). \qquad (1)$$

La correspondencia entre x e y es por tanto tal que a cada valor racional de x cuya expresión en el sistema de base 2 tenga un período de p cifras, corresponden p valores de y, dados por (1).

Cabe todavía considerar el caso de los números racionales que admiten dos desarrollos distintos de la forma

$$x = 0{,}A0111111\ldots = 0{,}A1000\ldots$$

En este caso, para el primer desarrollo corresponde $y = 1$ y para el segundo $y = 0$.

L. A. Santaló

12. — *Una recta móvil divide a una figura convexa plana en dos porciones de área constante. Demostrar que el lugar geométrico de los centros de gravedad de estos sectores es una línea que tiene las tangentes paralelas a las cuerdas respectivas y cuyo radio de curvatura en cada punto es igual al cubo de la cuerda respectiva dividido por 12 veces el área constante del sector. Generalización.*

L. S.

Solución. Consideremos dos cuerdas que cumplan las condiciones del enunciado y estén definidas respectivamente por las direcciones ϑ y $\vartheta + d\vartheta$. Las dos cuerdas determinan dos sectores infinitesimales de igual área y por tanto, llamando ρ_1, ρ_2 a las dos partes en que quedan divididas por su punto de intersección, debe ser $\rho_1{}^2 d\vartheta = \rho_2{}^2 d\vartheta$ de donde $\rho_1 = \rho_2$. Es decir, las dos cuerdas se cortan en su punto medio.

Sea G_1 el centro de gravedad de la parte de la figura convexa limitada por la cuerda correspondiente a la dirección ϑ y G_2 el correspondiente a la cuerda $\vartheta + d\vartheta$. Llamemos además G al centro de gravedad de la parte de figura convexa común a las dos porciones anteriores y A y B a los centros de gravedad de los dos sectores infinitesimales determinados por las dos cuerdas. Aplicando la proposición de que el centro de gravedad de una figura suma de otras dos está sobre el segmento que une los centros de gravedad de las dos figuras y divide al mismo en dos partes inversamente proporcionales a las masas (en este caso las áreas) respectivas, será $\frac{G_1 G}{G_1 A} = \frac{G_2 G}{G_2 B}$ (puesto que los dos sectores cuyos centros de gravedad son A y B ya dijimos que tienen la misma área). De aquí se deduce que la recta $G_1 G_2$ es paralela a AB; si se supone que las dos cuerdas consideradas tienden a coincidir, en el límite, AB tiende a la cuerda y $G_1 G_2$ a la tangente a la curva, lugar de los centros de gravedad G; estas dos rectas serán, pues, paralelas, lo que demuestra la primera parte del enunciado.

Para hallar el radio de curvatura, observemos que el elemento de arco de la curva lugar de G es $ds = G_1 G_2$. Por otra parte en los triángulos semejantes $G G_1 G_2$ y $G A B$ vale

$$\frac{G_1 G}{G_1 A} = \frac{G_1 G_2}{AB - G_1 G_2} \qquad (1)$$

Además, llamando F al área constante del segmento de figura convexa cortado por la cuerda correspondiente a la dirección ϑ y $c = 2\rho$ a la longitud de esta cuerda, es

$$\frac{G_1 G}{G_1 A} = \frac{\frac{1}{2}\rho^2 d\vartheta}{F} \qquad (2)$$

Cuando las dos cuerdas de direcciones ϑ y $\vartheta + d\vartheta$ tienden a coincidir, puesto que el centro de gravedad de un triángulo está situado sobre las medianas y las divide en dos segmentos cuya razón es $\frac{1}{2}$, en el límite será $AB = \frac{2}{3} c$. Con esto y de (1) y (2) se deriva

$$\frac{\rho^2 d\vartheta}{2F} = \frac{ds}{\frac{2}{3} c - ds}.$$

De aquí, recordando que $c = 2\rho$, el radio de curvatura R valdrá

$$R = \frac{ds}{d\vartheta} = \frac{c^3}{12\,F}$$

que demuestra el enunciado del problema.

Consecuencia. Si consideramos el caso en que el área F del segmento de área constante cortado por la cuerda variable tiende a cero, la curva lugar de los centros de gravedad G será el mismo contorno de la figura convexa dada y por tanto R su radio de curvatura. De aquí se deduce que, llamando F al área del segmento determinado por una cuerda de longitud c sobre una curva convexa, al reducirse a un punto esta cuerda c, es

$$R = \lim_{c \to 0} \frac{c^3}{12\,F}$$

siendo R el radio de curvatura de la curva en el punto límite.

L. A. Santaló

TEMAS PROPUESTOS

34. — Interpretar en el campo complejo la conocida transformación que suele hacerse de la serie logarítmica a fin de hacerla apta para el cálculo rápido de logaritmos de números grandes. Aplicación al cálculo de logaritmos de números complejos y del número π.

R.

35. — En una fila hay $2n$ asientos y se trata de reservar la mitad de ellos para n personas, de tal manera que nunca haya más de dos asientos consecutivos ocupados ni tampoco más de dos asientos consecutivos desocupados.

Determinar el número de posibilidades admisibles. Generalización.

A. Balasa