UN PROGRESO EN LA TEORIA ELEMENTAL DE LAS SUPERFICIES CURVAS

Por ROBERTO FRUCHT

Es sabido que la teoría clásica de las superficies curvas del espacio euclidiano de tres dimensiones se basa en la consideración de dos «tensores (o formas cuadráticas) fundamentales» y sus invariantes.

El primer tensor fundamental mide el cuadrado de la distancia entre dos puntos «infinitamente vecinos» de la superficie:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

siendo u y v coordenadas curvilíneas cualesquiera en la superficie; el segundo tensor, que escribimos (siguiendo a Blaschke (¹) en la forma: $L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2$, se obtiene por ejemplo cuando se considera, en un punto de la superficie y en una dirección $du : dv$ que pasa por él, la curvatura de la «sección normal», siendo esta curvatura igual al cociente de las dos «formas cuadráticas fundamentales»:

$$\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}. \tag{2}$$

Con los 6 coeficientes E, F, G, L, M, N que, por supuesto, son funciones de u y v, se pueden calcular, en cada punto de la superficie, dos importantísimos invariantes, la curvatura de Gauss:

(¹) Véase el capítulo ''Anfangsgruende der Flaechentheorie'' en el libro de W. Blaschke: ''Vorlesungen ueber Differentialgeometrie I: Elementare Differentialgeometrie'' (3ª edición, Berlín 1930).

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{3}$$

(que se anula para superficies desarrollables), y la curvatura media:

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \tag{4}$$

(que se anula para las superficies mínimas).

Pero esos 6 coeficientes no son funciones completamente independientes entre sí. Es un resultado célebre («théorema egregium») de Gauss que la curvatura K se puede expresar también en función sólo de E, F, G, y sus derivadas parciales hasta el 2°. orden, p. e. en la forma [1]:

$$(5)\quad K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv}, & \frac{1}{2}E_u, & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

En otras palabras, L, M, N no son completamente independientes de E, F, G, puesto que la expresión $LN - M^2$, en virtud de la relación (3), es función de E, F, G y sus derivadas:

$$LN - M^2 = (EG - F^2)K, \tag{6}$$

usando la letra K ahora como abreviación para el segundo miembro de la fórmula (5).

Hay otra interdependencia más entre los 2 tensores fundamentales de una superficie: las llamadas ecuaciones de Codazzi permiten expresar las diferencias $\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}$ y $\frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial N}{\partial u}$ en función de E, F, G (y sus derivadas) y de L, M, N mismas; se pueden escribir en la forma [1]:

$$(7) \qquad \frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}=\left(\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}\right) H-\frac{1}{2(EG-F^2)}\begin{vmatrix} E & \frac{\partial E}{\partial u} & L \\ F & \frac{\partial F}{\partial u} & M \\ G & \frac{\partial G}{\partial u} & N \end{vmatrix}.$$

$$(8) \qquad \frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial N}{\partial u}=\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right) H-\frac{1}{2(EG-F^2)}\begin{vmatrix} E & \frac{\partial E}{\partial v} & L \\ F & \frac{\partial F}{\partial v} & M \\ G & \frac{\partial G}{\partial v} & N \end{vmatrix}$$

«No hay otra interdependencia entre los dos tensores fundamentales, fuera de las expresadas por las identidades (6), (7), (8)» dicen los textos de geometría diferencial. Nada dicen, por lo general, sobre la curvatura media H en función de E, F, G y sus derivadas, aunque se presenta aquí casi espontáneamente el siguiente problema muy interesante: ¿Dado el tensor (1) de una superficie, puede H ser una función cualquiera, o es la curvatura media también una función bien determinada de E, F, G y sus derivadas — tal como es el caso de la curvatura de Gauss en virtud de la identidad (5)?

Parece que este problema no ha sido tratado en la geometría diferencial clásica y que la respuesta ha sido dada, por primera vez, en un trabajo del yugoslavo A. Vakselj [2] (trabajo que contiene también otras contribuciones interesantes a la teoría de las superficies). Independientemente de Vakselj (y sin conocer su publicación), algunos años más tarde ha tratado el mismo problema el norteamericano H. W. Alexander,

---

(2) A. VAKSELJ: *''Beitraege zur Flaechentheorie''*, Math. Zeitschrift, Bde 38, Heft 3 (Berlín 1934).

en la primera parte de una interesante publicación (3). Los dos matemáticos llegan al mismo resultado sorprendente:

La curvatura media H de una superficie no está determinada por E, F, G y sus derivadas, pero tampoco es completamente independiente de ellas; sino que *hay dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden las que debe cumplir* H *en función de las coordenadas* u *y* v, con coeficientes que dependen sólo de E, F, G y sus derivadas.

Desgraciadamente, estas ecuaciones diferenciales son tan complicadas que ninguno de los dos autores citados las indica de manera explícita para coordenadas generales, de modo que no se podría pensar en su resolución. También los cálculos efectuados por los dos autores son demasiado largos para poder reproducirlos aquí, y requieren bastante práctica en cálculo tensorial para poder seguir y comprender cada detalle del desarrollo (4).

Por eso esperamos que no serán sin interés las siguientes consideraciones elementales sobre cierta clase de ecuaciones diferenciales (a las que pertenecen las ecuaciones de Codazzi); pues ellas dejarán aparecer menos sorprendente la existencia de dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden para la curvatura media H. Demostraremos de un modo general que *cualquier función* de L, M, N cumple (por lo general) con dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden (con coeficientes que pueden depender de E, F, G y sus derivadas). Claro está que tales consideraciones generales no quieren ni pueden de ninguna manera reemplazar los desarrollos de Vakselj y Alexander (4).

*

* *

(3) H. W. ALEXANDER: "*The role of the mean curvature in the immersion theory of surfaces*", Transactions of the American Math. Society, vol. 47, Nº 2 (March 1940).

(4) Para quien quiera estudiar los trabajos originales observo que en la fórmula (4.4) de Alexander hay, según mi opinión, un pequeño error: hay que reemplazar el término $-\frac{\Delta_1 K}{2 N^4}$ por $+\frac{\Delta_1 (K, N^2)}{2 N^4}$. La lectura del trabajo de Vakselj se ve dificultada por el hecho de que el autor cambia la notación durante el desarrollo; p. e. nuestro segundo tensor fundamental (L, M, N) que en los primeros párrafos de Vakselj se llama a_{ik}, desde el § 5 en adelante se llama $\overline{a_{ik}}$, siendo pues a_{ik} otro tensor distinto.

Vamos a considerar el siguiente sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales parciales de primer orden para dos funciones de dos variables que llamaremos $L(u,v)$ y $M(u,v)$, en vista de la aplicación que haremos más tarde a nuestro problema de geometría diferencial. Pero, por ahora suponemos sólo que se trate de un sistema de dos ecuaciones que sean lineales en las derivadas $\frac{\partial L}{\partial u}, \frac{\partial L}{\partial v}, \frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}$ y cuyos coeficientes A_i y B_i sean funciones cualesquiera de u, v, L, M:

$$(9) \qquad \begin{cases} A_1 \dfrac{\partial L}{\partial u} + A_2 \dfrac{\partial L}{\partial v} + A_3 \dfrac{\partial M}{\partial u} + A_4 \dfrac{\partial M}{\partial v} + A_5 = 0 \\ B_1 \dfrac{\partial L}{\partial u} + B_2 \dfrac{\partial L}{\partial v} + B_3 \dfrac{\partial M}{\partial u} + B_4 \dfrac{\partial M}{\partial v} + B_5 = 0. \end{cases}$$

Ahora bien, lo que nos interesa no es la resolución del sistema (9), es decir la determinación de posibles funciones L y M que cumplan con esas ecuaciones diferenciales; sino que queremos obtener, con procesos de eliminación y derivación, ecuaciones diferenciales *para una función cualquiera* Φ *de las funciones «incógnitas»* L y M, la que puede depender además, de manera explícita, de las variables independientes u y v [5]. Demostraremos lo siguiente:

Introduciendo, en una función $\Phi(u, v, L, M)$ de 4 variables, para 2 variables L y M soluciones $L(u,v)$ y $M(u,v)$ del sistema (9), Φ pasará a ser una función $\Phi(u, v, L(u,v), M(u,v))$ de las 2 variables u y v sólo; como tal *cumplirá por lo general* (es decir salvo en casos excepcionales) *con dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden* bien determinadas las que son lineales en las derivadas de tercer orden o sea de la forma:

$$a \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^3} + b \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^2 \partial v} + c \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u\, \partial v^2} + d \frac{\partial^3 \Phi}{\partial v^3} + e = 0,$$

siendo a, b, c, d, e funciones de u, v, Φ y sus derivadas parciales hasta el segundo orden.

---

(5) Se entiende que Φ debe poseer derivadas continuas hasta el tercer orden.

Para demostrar ahora la existencia de 2 tales ecuaciones diferenciales para una dada función Φ de L y M observamos en primer lugar que también para Φ y L como funciones «desconocidas» habrá un sistema de dos ecuaciones diferenciales del mismo tipo (9), siempre que la definición de la función Φ admita una resolución respecto de M, de la forma:

$$M = f(u, v, \Phi, L); \tag{10}$$

pues, en este caso bastará reemplazar, en el sistema (9), la función M por el valor (10); se entiende que hay que reemplazar también $\frac{\partial M}{\partial u}$ por su valor:

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial u} \tag{11}$$

etc.

Se ve fácilmente que el resultado de esta substitución de M, será otro sistema del mismo tipo (9), pero esta vez para las funciones L y Φ. Introduciendo letras minúsculas para los nuevos coeficientes, en

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 \frac{\partial L}{\partial u} + a_2 \frac{\partial L}{\partial v} + a_3 \frac{\partial \Phi}{\partial u} + a_4 \frac{\partial \Phi}{\partial v} + a_5 = 0 \\ b_1 \frac{\partial L}{\partial u} + b_2 \frac{\partial L}{\partial v} + b_3 \frac{\partial \Phi}{\partial u} + b_4 \frac{\partial \Phi}{\partial v} + b_5 = 0 \end{aligned} \right. \tag{12}$$

tendremos el sistema de ecuaciones diferenciales para L y Φ en función de u y v; las a_i y b_i serán funciones bien determinadas de u, v, L, Φ (por ejemplo: $a_1 = A_1 + \frac{\partial f}{\partial L} \cdot A_3$ etc.).

Siempre que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, podremos resolver el sistema (12) respecto de $\frac{\partial L}{\partial u}$ y $\frac{\partial L}{\partial v}$; por ejemplo será:

(13)

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{a_3 b_2 - a_2 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{a_4 b_2 - a_2 b_4}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \frac{a_5 b_2 - a_2 b_5}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

y análoga ecuación habrá para $\frac{\partial L}{\partial v}$. Introduciendo todavía notaciones abreviadas para los negativos cocientes de determinantes que se presentan, podremos escribir más brevemente:

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial u} = \alpha_1 \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \alpha_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \alpha_3 \\ \dfrac{\partial L}{\partial v} = \beta_1 \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} + \beta_2 \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} + \beta_3 ; \end{cases}$$

nótese que también las α_i y β_i serán funciones bien determinadas de u, v, L, Φ.

Derivando la primera de las 2 ecuaciones (14) respecto de v, y la segunda respecto de u, e igualando los segundos miembros así obtenidos, resultará como «condición de integrabilidad» del sistema (14):

$$(15)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\alpha_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \alpha_3\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\beta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \beta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \beta_3\right),$$

o escrito detalladamente (y recordando el hecho de que las α_i y β_i son funciones de u, v, L, Φ):

(16)

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial v} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \ldots$$

$$= \beta_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial L} \cdot \frac{\partial L}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \ldots$$

Reemplazando todavía $\frac{\partial L}{\partial u}$ y $\frac{\partial L}{\partial v}$ por los segundos miembros de las ecuaciones (14), la condición (16) llegará a ser una relación de la forma

$$(17)\qquad -\beta_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + (\alpha_1 - \beta_2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u\, \partial v} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} +$$

$$+ T\left(u, v, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, L\right) = 0,$$

si reunimos bajo la abreviación T todos los términos que *no* contengan *segundas* derivadas de Φ. Siendo, por lo general, α_1, α_2, β_1, β_2 y T funciones también de L, en (17) tenemos, pues, una relación entre la función L, las variables u, v, la función Φ y sus derivadas hasta el segundo orden. No entrando más las derivadas de la función L, podemos imaginar resuelta la relación (17) respecto de L, obteniendo de esta manera L como función de u, v, Φ y sus derivadas hasta el segundo orden. En otras palabras, por lo general (6) la ecuación (17) admitirá una resolución de la forma:

$$(18) \qquad L = \varphi \left(u, v, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \, \partial v}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \right).$$

Por fin, podemos derivar esta última función φ respecto de u y v, obteniendo para $\frac{\partial L}{\partial u}$ y $\frac{\partial L}{\partial v}$ ciertas expresiones que dependerán de u, v, Φ y las derivadas de Φ *hasta el tercer orden* (p .e. será

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi u} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi v} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \, \partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial \Phi uu} \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^3} + \ldots).$$

Volviendo ahora al sistema de ecuaciones (14), en sus primeros miembros podremos sustituir a las derivadas parciales $\frac{\partial L}{\partial u}$ y $\frac{\partial L}{\partial v}$ sus valores que acabamos de desarrollar, y si todavía en los segundos miembros de (14) — en las funciones α_i y β_i que pueden depender de L — reemplazamos L siempre por la expresión φ indicada por la relación (18), el sistema (14) se transformará en *dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden* para Φ (en función de u y v) sólo (es decir sin entrar más las funciones L y M de las que han partido nuestras

---

(6) No ofrece ningun interés el caso de no ser posible una resolución de la forma (18) por no figurar L en la relación (17); pues en tal caso tendríamos en (17) hasta una ecuación diferencial de segundo orden para Φ (cuya derivación respecto de u y v nos daría inmediatamente dos ecuaciones diferenciales de tercer orden para Φ.

consideraciones). Aun sin efectuar todas esas substituciones, se ve claramente que las dos ecuaciones diferenciales obtenidas son lineales en las 4 derivadas de tercer orden

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^3}, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^2 \partial v}, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial u\, \partial v^2}, \quad \frac{\partial^3 \Phi}{\partial v^3}.$$

*

* *

¿Cómo se aplican ahora las consideraciones generales que acabamos de hacer, al caso de la curvatura media H de una superficie?

Considerando E, F, G como funciones *conocidas* de las variables u y v, podemos usar la relación (6) para expresar N en función de L y M:

$$N = \frac{1}{L}\left\{M^2 + (EG - F^2)\, K\right\}; \tag{19}$$

K sirve aquí como abreviación para el 2°. miembro de la identidad (5).

Reemplazando este valor de N en las ecuaciones (7) y (8) de Codazzi, estas últimas nos darán un sistema de ecuaciones de la forma

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = A\left(u, v, L, M, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) \\ &\frac{M^2+(EG-F^2)K}{L^2} \cdot \frac{\partial L}{\partial u} - \\ &-\frac{2M}{L} \cdot \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial v} = B\left(u, v, L, M, E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots\right) \end{aligned}\right. \tag{20}$$

en donde A y B sirven como abreviaciones para funciones «complicadas», pero bien determinadas de u, v, E, F, G (y sus derivadas), L, M.

Por lo tanto, si E, F, G son funciones dadas de u y v, en (20) tenemos para las dos funciones $L(u,v)$ y $M(u,v)$ un sistema de ecuaciones diferenciales lineales del tipo (9). (Por ejemplo será $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $B_3 = -\frac{2M}{L}$, etc.).

Por consiguiente, habrá por lo general dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden para cualquier función Φ de L y M, y también para cualquier función de L, M, N, puesto que N, en virtud de (19), es expresable por L y M. Por ejemplo, podremos tomar, como función Φ, la curvatura media H, la que, por su definición (4), es una función de u, v, L, M y N, si consideramos E, F, G como funciones dadas de u y v. Siempre que todas las suposiciones hechas más arriba (en el desarrollo general) sean cumplidas, nuestras consideraciones elementales nos enseñan que la existencia de dos ecuaciones diferenciales parciales de tercer orden para la curvatura media es una consecuencia formal de las identidades (6), (7) y (8) entre los dos tensores fundamentales de una superficie.

Desgraciadamente, el cálculo efectivo de las dos ecuaciones diferenciales para H, según el método general considerado por nosotros, no parece ser posible por varias dificultades de orden práctico (p .e., siempre en el caso de H como función Φ, no parece posible encontrar, de la manera indicada, una resolución explícita del tipo (18) para la relación (17), por ser demasiado «complicada» la función T que entra en esta última).

Universidad Técnica F. Santa María
Valparaíso (Chile), 1941.

TEMAS PROPUESTOS

36. — Estudiar la sucesión recurrente $u_1, u_2, u_3, \ldots$ definida por la relación

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots\ldots + a_p u_{n+p} = 0 \qquad a_p \neq 0,$$

y en especial obtener la relación existente entre $p+1$ términos cualesquiera $u_{n_0}, u_{n_1}, \ldots, u_{n_p}$.

J. Babini

37. — Estudiar las propiedades de la función introducida por Legendre (Exercices vol. I, p. 262) definida así:

$$(x, n)^m = \frac{1}{x^m} + \frac{1}{(x+n)^m} + \frac{1}{(x+2n)^m} + \ldots\ldots$$