CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

No. 9. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *son los términos de una progresión armónica, demostrar que:* $\sum_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r = n\,\alpha_1$*; siendo* d *la razón de la progresión aritmética y* $C\,n,r$ *los productos de las* α *tomadas de* r *en* r.

Si desarrollamos el siguiente producto de binomios:

$$(1+\alpha_1 d)(1+\alpha_2 d)\ldots(1+\alpha_n d) = 1 + d(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n) + d^2(\alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n)+\ldots$$

$+d^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ es la sumatoria expresada en el primer miembro, aumentada en 1 y multiplicada por d; o sea: $\sum_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r =$

$$= \frac{(1+\alpha_1 d)(1+\alpha_2 d)\ldots(1+\alpha_n d)-1}{d}.$$

Pero siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ una progresión armónica, es $\frac{1}{\alpha_1}$; $\frac{1}{\alpha_2}$; $\ldots \frac{1}{\alpha_n}$ una progresión aritmética de razón d; luego un término cualquiera $\frac{1}{\alpha_i}$ se obtiene mediante el algoritmo siguiente:

$$\frac{1}{\alpha_i} = \frac{1}{\alpha_{i-1}} + d \;\therefore\; \frac{1}{\alpha_i} = \frac{1+d\,\alpha_{i-1}}{\alpha_{i-1}} \;\therefore\; (1+d\,\alpha_{i-1}) = \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} \quad (1) \text{ y}$$

además resulta: $\frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{\alpha_1} + (n-1)\,d \;\therefore\; \alpha_n = \frac{\alpha_1}{1+(n-1)\,d\,\alpha_1}$ (2);

luego, sustituyendo los binomios por los valores dados en (1), resulta:

$$\sum_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r = \frac{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\cdots\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}(1+\alpha_n d)-1}{d} = \frac{1}{d}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_n}(1+\alpha_n d)-1\right]$$

y sustituyendo α_n por el valor dado en (2):

$$\sum_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r = \frac{1}{d}\left[(1+\alpha_1(n-1)\,d)\left(1+\frac{\alpha_1 d}{1+(n-1)\,d\,\alpha_1}\right)-1\right] =$$

$$= \frac{1}{d}\,(1+\alpha_1(n-1)\,d+\alpha_1 d-1) \;\therefore$$

$$\sum_{r=1}^{n} d^{r-1} C\,n,r = n\,\alpha_1.$$

Juan José Rodríguez
Alumno de 2º Año de Matemáticas del I. N. P. S.