# SOBRE UNA PROPIEDAD DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS CON RAICES REALES

Por FERNANDO L. GASPAR

*1.* — Sea la ecuación

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n = 0 \qquad (1)$$

y sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sus $n$ raíces supuestas distintas y reales.

Vamos a demostrar que existen infinitos sistemas de polinomios ortogonales en el conjunto de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, formado por dichas raíces, que todos estos sistemas son finitos, que el último polinomio de cada uno de ellos es de grado $n$, y que es el mismo, siendo, en menos de una constante multiplicativa, el polinomio

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n \qquad [2]$$

que tiene, precisamente, aquellos ceros.

En efecto; asignemos $n$ pesos $y_i$ (llamados también ponderaciones o frecuencias) en los puntos de abscisas $x_i$ y sea $\{P_r(x)\}$ un sistema de polinomios, ortogonal en ese conjunto de puntos respecto de los pesos $y_i$, cuya existencia vamos a demostrar; por tanto, deberá verificarse

$$\sum_{i=1}^{n} y_i P_j(x_i) P_k(x_i) = 0 \qquad (j \neq k) \qquad [3]$$

Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los ceros del polinomio [2] es

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_n x_i^n) = 0$$

por la nulidad de cada uno de los sumandos; por la misma razón, es

$$\sum_{i=1}^{n} y_i (\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_n x_i^n)\, x_i^s = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

Llamando $\mu_s$ a los *momentos* de los pesos $y_i$ es

$$\mu_s = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^s \qquad [4]$$

Por tanto, resulta

$$\sum_{i=1}^{n} y_i (\alpha_0 + \alpha_1 x_i + \ldots + \alpha_n x_i^n)\, x_i^s =$$
$$\alpha_0 \mu_s + \alpha_1 \mu_{s+1} + \ldots + \alpha_n \mu_{s+n} = 0 \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots) \quad [5]$$

de donde, la fórmula de recurrencia de orden $n$

$$\mu_{s+n} = -\frac{1}{\alpha_n} (\alpha_0 \mu_s + \alpha_1 \mu_{s+1} + \ldots + \alpha_{n-1} \mu_{s+n-1}) \qquad [6]$$

que expresa los momentos $\mu_s$ como combinación lineal de los $n$ anteriores; los coeficientes de la combinación lineal son los $n$ primeros coeficientes del polinomio [2], ordenado según las potencias crecientes de $x$, divididos por el coeficiente de $x^n$.

En el caso particular de que no exista ponderación, esta recurrencia resulta inmediatamente como aplicación del conocido teorema de álgebra, relativo a las propiedades de las funciones simétricas enteras de las raíces de una ecuación algebraica (1).

Ahora bien; si existe el sistema $\{P_r(x)\}$ ortogonal respecto de los pesos $y_i$, en el conjunto de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, los polinomios que lo forman pueden ser siempre escritos en forma de determinante, en función de los momentos $\mu_s$ (2); el

---

(1) Rey Pastor, J., *Lecciones de Algebra*, 2ª ed., (Madrid, 1935), pág. 153.

(2) Gaspar, Fernando L., *Sobre la finitud de los sistemas de polinomios ortogonales en dominio discontinuo y la ley de recurrencia que la define.* Rev. de la Fac. de C. Econ. 3ª serie, T. VIII, Nº 2 (Rosario, 1939).

de grado $n$, en menos de una constante multiplicativa sería, pues.

$$P_n(x) = c \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots x^n \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots \mu_{2n-1} \end{vmatrix} \quad (c = \text{constante}) \qquad [7]$$

Si en [5] damos a $s$ los valores 0, 1, 2, ..., $n-1$, obtenemos $n$ ecuaciones de condición a que deben satisfacer los coeficientes $\alpha_i$; eliminando las $\alpha_i$ entre la ecuación dada [1] y las $n$ ecuaciones lineales y homogéneas anteriores, se obtiene la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots x^n \\ \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \dots \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \dots \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \mu_{n+1} & \dots \mu_{2n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

El primer miembro de esta ecuación, es un polinomio de grado $n$ en $x$ que se anula para los valores $x_1$, $x_2$, ...., $x_n$, que son las raíces de la ecuación [1]; este polinomio que no es otro, en menos de una constante multiplicativa, que el $P_n(x)$ escrito en forma de determinante según [7] es, pues, el mismo polinomio [2]; suprimiendo la última fila y la última columna se tiene un polinomio de grado $n-1$; suprimiendo las dos últimas filas y las dos últimas columnas se tiene otro de grado $n-2$ y así sucesivamente, suprimiendo las $n$ últimas filas y $n$ últimas columnas queda la unidad. Vamos a demostrar que estos $n+1$ polinomios, incluyendo el $P_0(x) = 1$, son los que forman el sistema $\{P_r(x)\}$ y que, por tanto, cumplen la condición [3].

Consideremos el par $P_j(x)$, $P_k(x)$ con $j < k \leq n$. $P_j(x)$ será una función de la forma $\beta_0 + \beta_1 x + \dots + \beta_j x^j$; escribiendo en [3] a $P_j(x)$ en esta forma y a $P_k(x)$ en forma de determinante, es inmediato ver que la condición de ortogonalidad se cumple. Resulta

$$\sum_{i=1}^{n} y_i P_j(x_i) P_k(x_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[ c \begin{vmatrix} 1 & x_i & \dots & x_i^k \\ \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \dots & \mu_{2k-1} \end{vmatrix} (\beta_0 + \beta_1 x_i + \dots + \beta_j x_i^j) \right] = 0$$

pues el segundo miembro se descompone en una suma de $j+1$ determinantes de orden $k+1$, todos nulos por tener, cada uno de ellos, la primera fila igual a la 2ª., o a la 3ª., . . ., o a la $(j+1)$-ésima; por tanto, la nulidad, en este caso, está demostrada.

Si es $j=k=n$, la nulidad también se verifica, pues se tiene la suma de $n+1$ determinantes de orden $n+1$ todos nulos; los $n$ primeros lo son por tener la primer fila igual a una de las $n$ filas siguientes; el último también lo es pues, por la ley de recurrencia [6], tiene la primer fila que es combinación lineal de los n siguientes.

En cambio, si es $j=k<n$ se verificará

$$\sum_{i=1}^{n} P_k^2(x_i) \neq 0 \qquad [8]$$

Esto resulta, inmediatamente, siguiendo el procedimiento anterior, pues se tendría una suma de $k+1$ determinantes de orden $k+1$, de los cuales los $k$ primeros serían nulos por tener la primer fila igual a una de las $k$ filas siguientes. El último determinante, pasando la primer fila al último puesto, podemos escribirlo así:

$$(-1)^k c \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \dots & \mu_{2k-1} \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots & \mu_{2k} \end{vmatrix} \qquad [9]$$

Formemos las matrices horizontales semejantes con $n$ columnas y $k+1$ filas $(k+1 \leqq n)$

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & \dots 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots x_k & \dots & x_n \\ x^2{}_1 & x^2{}_2 & \dots x^2{}_k & \dots & x^2{}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^k{}_1 & x^k{}_2 & \dots x^k{}_k & \dots & x^k{}_n \end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k & \dots & y_n \\ y_1x_1 & y_2x_2 & \dots & y_k x_k & \dots & y_nx_n \\ y_1x^2{}_1 & y_2x^2{}_2 & \dots & y_k x^2{}_k & \dots & y_nx^2{}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1x^k{}_1 & y_2x^k{}_2 & \dots & y_k x^k{}_k & \dots & y_nx^k{}_n \end{matrix}\right.$$

Recordando la ley del producto por filas de dos matrices horizontales semejantes, si lo efectuamos en este caso, obtenemos una matriz cuadrada de orden $k+1$ que, por [4], podemos escribir así:

$$\left\{\begin{matrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots \mu_k \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots \mu_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_k & \mu_{k+1} & \dots \mu_{2k} \end{matrix}\right.$$

cuyo determinante, que no es otro que el [9], es la suma de los productos obtenidos multiplicando los determinantes de orden máximo de cada matriz, por sus homólogos en la otra ([3]). Por tanto, el determinante [9] es igual a una suma de $\binom{n}{k+1}$ determinantes de orden $k+1$ de la forma

$$(-1)^k c\, y_1 \dots y_l \dots y_n \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & \dots 1 \\ x_1 & \dots & x_l & \dots x_n \\ x^2{}_1 & \dots & x^2{}_l & \dots x^2{}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^k{}_1 & \dots & x^k{}_l & \dots x^k{}_n \end{vmatrix}^2$$

determinantes de Vandermonde que sólo se anulan si tienen elementos iguales; por tanto, la nulidad sólo puede verificarse si no hay $k+1$ raíces desiguales; pero, por hipótesis, hay $n$ raíces desiguales y siendo $k<n$, cada uno de los sumandos es

([3]) Rey Pastor, J., *Elementos de Análisis Algebraico*, 5ª ed., (Madrid, 1939), pág. 260.

distinto de cero y positivo por ser un cuadrado. Por consiguiente, el determinante [9] también es distinto de cero y positivo. La desigualdad [8] está demostrada.

Si del polinomio de grado $n$ pasamos al de grado $n+1$, escrito en forma de determinante, por la ley de recurrencia [6] resulta que la última fila es combinación lineal de las $n$ anteriores, por lo cual el polinomio es idénticamente nulo y lo mismo ocurre con todo polinomio $P_s(x)$ con $s>n$; luego el sistema es finito y el último polinomio es el de grado $n$.

Por tanto existe el sistema de polinomios $\{P_r(x)\}$ que, en el conjunto de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tienen, respecto de los pesos $y_i$, la siguiente propiedad:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i P_j(x_i) P_k(x_i) \begin{cases} = 0 \text{ si es } j \neq k \\ = 0 \text{ si es } j = k \geqq n \\ \\ \neq 0 \text{ si es } j = k < n \end{cases}$$

que es, precisamente, la que tienen los sistemas de polinomios ortogonales en conjuntos finitos de puntos (4).

Los pesos pueden ser arbitrarios y sean cuales fueren los que asignemos a las $n$ abscisas $x_i$, por lo demostrado, se deduce que siempre existirá un polinomio de grado $n$, perteneciente a un sistema ortogonal respecto de esos pesos, que se anulará para los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es decir, que en menos de una constante multiplicativa, dichos polinomios son todos iguales e iguales al polinomio [2].

Además, fijados los pesos, el sistema ortogonal es único. Esto se deduce, de inmediato, del hecho que, dadas las $n$ abscisas $x_i$ y los $n$ momentos, $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$, existe una única distribución de pesos que, asignados a dichas abscisas, tienen aquellos momentos, pues la determinación de ella resulta de la solución de un sistema de $n$ ecuaciones lineales no homogéneas en las $n$ incógnitas $y_i$, sistema que, como se sabe, tiene solución única cuando el determinante de los coeficientes es distinto de cero, lo que, en este caso, se verifica por ser, según la hipótesis, $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_n$.

(4) GASPAR, FERNANDO L., *Ibidem*.

Por tanto, podemos formular el siguiente teorema:

*Toda ecuación algebraica de grado* n *con* m *raíces reales, las múltiples contadas una sola vez* (5), *define, para cada conjunto de pesos asignados a dichas raíces, un único sistema de polinomios ortogonales en el conjunto de puntos formado por las mismas; los sistemas son finitos y el último polinomio de cada uno de ellos es, en menos de una constante multiplicativa, el mismo, de grado* m *y, precisamente, el que se deduce de las* m *raíces reales y distintas de la ecuación dada.*

2. — Es sabido que los polinomios ortogonales en un intervalo $(a, b)$, finito o infinito, tienen todos sus ceros reales y distintos; entonces, por el teorema anterior, existe una correspondencia entre los polinomios de un sistema ortogonal en un intervalo, y los sistemas finitos que se deducen de cada uno de ellos, ortogonales en el conjunto de puntos formados por sus ceros. Como, a su vez, los polinomios de un sistema ortogonal en un conjunto finito de puntos, tienen todos sus ceros reales y distintos (6) resulta, en definitiva, el siguiente teorema que es corolario del anterior:

*A cada uno de los polinomios de grado* n, $\mathrm{R_n(x)}$, *de un sistema* $\{\mathrm{R_r(x)}\}$, *ortogonal en un intervalo* (a, b), *finito o infinito, sea el sistema ponderado o sin ponderar, corresponde una sucesión finita de sistemas de polinomios ortogonales. El primer elemento de la sucesión está formado por los sistemas cuyo último polinomio es de grado* n *y son ortogonales en el conjunto de puntos* $\mathrm{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ *formado por las* n *raíces reales de* $\mathrm{R_n(x)}$; *el segundo elemento de la sucesión está formado por los sistemas cuyo último polinomio es de grado* $\mathrm{n - 1}$ *y se deducen del polinomio de grado* $\mathrm{n - 1}$ *de cada uno de los sistemas anteriores y así sucesivamente.*

---

(5) De [4] y [5] se ve, inmediatamente, que si hay raíces múltiples la ley de recurrencia no es más de orden $n$ sino de orden $l < n$ y entonces, el último polimonio del sistema no es ya de grado $n$ sino de grado $l$; siendo nulos todos los siguientes.

(6) GASPAR, FERNANDO L., *Sobre algunas series funcionales*, Publicaciones de la Fac. de C. Matemáticas, Serie Técnico-científica, Nº 10, (Rosario, 1937), pág. 54. (Basta sustituir, en la demostración, $\int$ por $\Sigma$).

3. — En un trabajo anterior (7), hemos demostrado el siguiente teorema relativo a los polinomios ortogonales en un intervalo $(a, b)$:

*Cada una de las* n *raíces de un polinomio de grado* n, *perteneciente a un sistema ortogonal, es una combinación lineal distinta de los* n *momentos* $m_1$, $m_2$ ..., $m_n$; *el cuadrado de cada una de esas raíces, es la misma combinación lineal de los* n *momentos* $m_2$, $m_3$, ..., $m_{n+1}$, *y así sucesivamente hasta la n-ésima potencia de esas raíces, cada una de las cuales es la misma combinación lineal de los* n *momentos* $m_n$, $m_{n+1}$, ..., $m_{2n-1}$.

*Esas* n *combinaciones lineales distintas, aplicadas a los* n *momentos* $m_0$, $m_1$, ..., $m_{n-1}$, *resultan todas iguales a la unidad.*

Es decir, que si se tiene un sistema de polinomios $\{R_r(x)\}$ ortogonal respecto de una función $\varphi(x)$ en un intervalo $(a, b)$, finito o infinito y, por tanto, se verifica

$$\int_a^b \varphi(x)\, R_j(x)\, R_k(x)\, dx \begin{cases} = 0 \text{ si es } j \neq k \\ \neq 0 \text{ si es } j = k \end{cases}$$

siendo $\varphi(x) \geqq 0$ en $(a, b)$, $m_s$ sus momentos definidos así:

$$m_s = \int_a^b \varphi(x)\, x^s\, dx$$

y $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ los ceros de $R_n(x)$, existen $n$ combinaciones lineales distintas tales que, designando sus coeficientes por

$$l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n;\ j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_n;\ \ldots;\ k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n$$

se verifica

(7) *Ibidem*, pág. 34.

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{llll}
l_1 m_0 + l_2 m_1 & + \ldots + l_n m_{n-1} & = 1 \\
j_1 m_0 + j_2 m_1 & + \ldots + j_n m_{n-1} & = 1 \\
\multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
k_1 m_0 + k_2 m_1 & + \ldots + k_n m_{n-1} & = 1
\end{array}\right. \\
\text{y, además,} \\
\left\{\begin{array}{llll}
l_1 m_1 + l_2 m_2 & + \ldots + l_n m_n & = x_1 \\
l_1 m_2 + l_2 m_3 & + \ldots + l_n m_{n+1} & = x^2{}_1 \\
\multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
l_1 m_n + l_2 m_{n+1} & + \ldots + l_n m_{2n-1} & = x^n{}_1
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{llll}
j_1 m_1 + j_2 m_2 & + \ldots + j_n m_n & = x_2 \\
j_1 m_2 + j_2 m_3 & + \ldots + j_n m_{n+1} & = x^2{}_2 \\
\multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
j_1 m_n + j_2 m_{n+1} & + \ldots + j_n m_{2n-1} & = x^n{}_2
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left\{\begin{array}{llll}
k_1 m_1 + k_2 m_2 & + \ldots + k_n m_n & = x_n \\
k_1 m_2 + k_2 m_3 & + \ldots + k_n m_{n+1} & = x^2{}_n \\
\multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
k_1 m_n + k_2 m_{n+1} & + \ldots + k_n m_{2n-1} & = x^n{}_n
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad [10]$$

Ahora bien, por tener $R_n(x)$ sus $n$ ceros reales y distintos, existen, por lo demostrado, infinitos sistemas $\{P_r(x)\}$ ortogonales en el conjunto de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que forman esos ceros (que también son los de los polinomios de grado $n$ de dichos sistemas), siendo estos sistemas finitos y el último polinomio de cada uno de ellos el de grado $n$. Estos polinomios de grado $n$ pueden ser siempre escritos en forma de determinante según [7], determinantes que se anularán cuando, en su primera fila, en vez de las potencias sucesivas de $x$, se pongan las potencias sucesivas de $x_1$, o de $x_2$, ..., o de $x_n$, pero, por la conocida propiedad de los determinantes, cuando un determinante es nulo, una línea es combinación lineal de las otras. En el determinante [7], que es de orden $n+1$, las $n$ filas siguientes a la primera, son independientes entre sí, porque si no el polinomio sería idénticamente nulo, por lo tanto, es la primer fila la que resulta combinación lineal de las demás, cuando se ha sustituído en ella, en lugar de las potencias sucesivas de $x$, las potencias sucesivas de los ceros del polimonio.

Como hay $n$ ceros distintos, hay $n$ combinaciones lineales distintas y llamando a los coeficientes de cada una de ellas por

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; \ldots; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n,$$

se tendrá, en forma análoga a la anterior, el siguiente sistema de igualdades:

$$\left.\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l}
\gamma_1 \mu_0 + \gamma_2 \mu_1 + \ldots + \gamma_n \mu_{n-1} = 1 \\
\lambda_1 \mu_0 + \lambda_2 \mu_1 + \ldots + \lambda_n \mu_{n-1} = 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_1 \mu_0 + \xi_2 \mu_1 + \ldots + \xi_n \mu_{n-1} = 1
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\gamma_1 \mu_1 + \gamma_2 \mu_2 + \ldots + \gamma_n \mu_n = x_1 \\
\gamma_1 \mu_2 + \gamma_2 \mu_3 + \ldots + \gamma_n \mu_{n+1} = x^2{}_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\gamma_1 \mu_n + \gamma_2 \mu_{n+1} + \ldots + \gamma_n \mu_{2n-1} = x^n{}_1
\end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l}
\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2 + \ldots + \lambda_n \mu_n = x_2 \\
\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_3 + \ldots + \lambda_n \mu_{n+1} = x^2{}_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_1 \mu_n + \lambda_2 \mu_{n+1} + \ldots + \lambda_n \mu_{2n-1} = x^n{}_2
\end{array}\right. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\left\{\begin{array}{l}
\xi_1 \mu_1 + \xi_2 \mu_2 + \ldots + \xi_n \mu_n = x_n \\
\xi_1 \mu_2 + \xi_2 \mu_3 + \ldots + \xi_n \mu_{n+1} = x^2{}_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_1 \mu_n + \xi_2 \mu_{n+1} + \ldots + \xi_n \mu_{2n-1} = x^n{}_n
\end{array}\right.
\end{array}\right\} [11]$$

Como existen infinitos sistemas de polinomios ortogonales en el conjunto de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, existirán infinitos sistemas de igualdades [11] cuyos primeros miembros son iguales entre sí e iguales a los primeros miembros de las igualdades [10].

# UN PROGRESO EN LA TEORIA ELEMENTAL DE LAS SUPERFICIES CURVAS

Por ROBERTO FRUCHT

Es sabido que la teoría clásica de las superficies curvas del espacio euclidiano de tres dimensiones se basa en la consideración de dos «tensores (o formas cuadráticas) fundamentales» y sus invariantes.

El primer tensor fundamental mide el cuadrado de la distancia entre dos puntos «infinitamente vecinos» de la superficie:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

siendo $u$ y $v$ coordenadas curvilíneas cualesquiera en la superficie; el segundo tensor, que escribimos (siguiendo a Blaschke [1] en la forma: $L\,du^2 + 2\,M\,du\,dv + N\,dv^2$, se obtiene por ejemplo cuando se considera, en un punto de la superficie y en una dirección $du : dv$ que pasa por él, la curvatura de la «sección normal», siendo esta curvatura igual al cociente de las dos «formas cuadráticas fundamentales»:

$$\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}. \tag{2}$$

Con los 6 coeficientes $E$, $F$, $G$, $L$, $M$, $N$ que, por supuesto, son funciones de $u$ y $v$, se pueden calcular, en cada punto de la superficie, dos importantísimos invariantes, la curvatura de Gauss:

---

(1) Véase el capítulo "Anfangsgruende der Flaechentheorie" en el libro de W. Blaschke: "Vorlesungen ueber Differentialgeometrie I: Elementare Differentialgeometrie" (3ª edición, Berlín 1930).

$$(3) \qquad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

(que se anula para superficies desarrollables), y la curvatura media:

$$(4) \qquad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

(que se anula para las superficies mínimas).

Pero esos 6 coeficientes no son funciones completamente independientes entre sí. Es un resultado célebre («théorema egregium») de Gauss que la curvatura $K$ se puede expresar también en función sólo de $E, F, G,$ y sus derivadas parciales hasta el 2°. orden, p. e. en la forma [1]:

$$(5) \quad K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} G_{uu} + F_{uv} - \frac{1}{2} E_{vv}, & \frac{1}{2} E_u, & F_u - \frac{1}{2} E_v \\ F_v - \frac{1}{2} G_u & E & F \\ \frac{1}{2} G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} E_v & \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} E_v & E & F \\ \frac{1}{2} G_u & F & G \end{vmatrix} \right\}.$$

En otras palabras, $L, M, N$ no son completamente independientes de $E, F, G,$ puesto que la expresión $LN - M^2$, en virtud de la relación (3), es función de $E, F, G$ y sus derivadas:

$$(6) \qquad LN - M^2 = (EG - F^2)K,$$

usando la letra $K$ ahora como abreviación para el segundo miembro de la fórmula (5).

Hay otra interdependencia más entre los 2 tensores fundamentales de una superficie: las llamadas ecuaciones de Codazzi permiten expresar las diferencias $\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}$ y $\frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial N}{\partial u}$ en función de $E, F, G$ (y sus derivadas) y de $L, M, N$ mismas; se pueden escribir en la forma [1]:

$$(7)\qquad \frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}=\left(\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}\right)H-\frac{1}{2(EG-F^2)}\begin{vmatrix} E & \frac{\partial E}{\partial u} & L \\ F & \frac{\partial F}{\partial u} & M \\ G & \frac{\partial G}{\partial u} & N \end{vmatrix}.$$

$$(8)\qquad \frac{\partial M}{\partial v}-\frac{\partial N}{\partial u}=\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)H-\frac{1}{2(EG-F^2)}\begin{vmatrix} E & \frac{\partial E}{\partial v} & L \\ F & \frac{\partial F}{\partial v} & M \\ G & \frac{\partial G}{\partial v} & N \end{vmatrix}$$

«No hay otra interdependencia entre los dos tensores fundamentales, fuera de las expresadas por las identidades (6), (7), (8)» dicen los textos de geometría diferencial. Nada dicen, por lo general, sobre la curvatura media $H$ en función de $E, F, G$ y sus derivadas, aunque se presenta aquí casi espontáneamente el siguiente problema muy interesante: ¿Dado el tensor (1) de una superficie, puede $H$ ser una función cualquiera, o es la curvatura media también una función bien determinada de $E, F, G$ y sus derivadas — tal como es el caso de la curvatura de Gauss en virtud de la identidad (5)?

Parece que este problema no ha sido tratado en la geometría diferencial clásica y que la respuesta ha sido dada, por primera vez, en un trabajo del yugoslavo A. Vakselj [2] (trabajo que contiene también otras contribuciones interesantes a la teoría de las superficies). Independientemente de Vakselj (y sin conocer su publicación), algunos años más tarde ha tratado el mismo problema el norteamericano H. W. Alexander,

(2) A. VAKSELJ: ''*Beitraege zur Flaechentheorie*'', Math. Zeitschrift, Bde 38, Heft 3 (Berlín 1934).