CURVA DE CONTACTO DE UN CONOIDE CON LA SUPERFICIE DIRECTRIZ

(Tema Nº 13, Vol. VII, pág. 27)

Entre los temas de estudio propuestos en números anteriores, figura con el Nº. 13, éste del Prof. Rosell Soler: *Construir la tangente en cada uno de sus puntos a la curva de contacto de una esfera con el conoide circunscripto definido por una directriz rectilínea exterior y la recta impropia del plano perpendicular a ésta. Generalización.*

Para construir efectivamente la curva de contacto pedida, es cómodo considerar planos perpendiculares a la directriz rectilínea del conoide, planos que cortarán a la superficie esférica según círculos menores. Tendremos así en uno de estos planos, una circunferencia menor, y la traza de dicha directriz; las dos rectas tangentes desde esta traza a la circunferencia, pertenecen al conoide circunscripto a la esfera, y los dos puntos de tangencia pertenecen a la curva de contacto de ambas superficies. Por tanto, para cada sección se tiene un par de puntos de la curva de contacto. Puede observarse que siendo recto el ángulo de la recta tangente a la circunferencia menor desde la traza de la directriz, y el radio, los puntos de la curva en cuestión pueden considerarse como determinados por la intersección de la esfera con una superficie cilíndrica, de radio igual a la mitad de la distancia entre el centro de la esfera y la directriz, siendo su eje paralelo a esta última y coplanar con la misma y el centro de la esfera.

Para determinar ahora la recta tangente en cada punto de la curva de contacto del conoide con la esfera (o de intersección del cilindro con la esfera), basta trazar en un punto de la misma el plano tangente a la esfera, que queda determinado por dos rectas tangentes, por ejemplo a la circunferencia menor que nos determinaba un punto de la curva de contacto, y a un círculo máximo cualquiera que pase por el punto de dicha curva, y otro plano tangente al cilindro de intersección, en el mismo punto, plano éste que puede determinarse por la generatriz del cilindro, que pasa por el punto, y la tangente a la sección normal en el mismo. La intersección de estos dos planos, determina la recta tangente pedida.

El procedimiento puede ser generalizado, siendo aplicable a curvas de contacto determinadas suponiendo cualquier superficie de revolución, en vez de esferas, con la condición que la generatriz sea una curva continua, y que admita tangentes en todos sus puntos.

Para construir geométricamente la recta pedida, es cómodo usar la representación Monge, en que las tangentes a las secciones que intervienen en el razonamiento, se reducen, en el caso de la esfera, a trazar tangentes a circunferencias.

El problema se resuelve también fácilmente en forma analítica. Para ello representaremos la curva de contacto del conoide y la esfera en coordenadas esféricas. A tal efecto, tomamos en la esfera, cuyo radio indicaremos con R, el plano del ecuador normal a la directriz rectilínea del conoide, y fijamos un meridiano cualquiera como origen de longitudes, por comodidad el determinado por el plano normal al plano de la directriz rectilínea y el centro de la esfera. Indicando con ϑ, φ las coordenadas (latitud y longitud) de un punto de la curva de contacto, se tiene (fig. 1), que fijado ϑ, tenemos una sección paralela de la esfera; y φ queda determinado por la longitud del

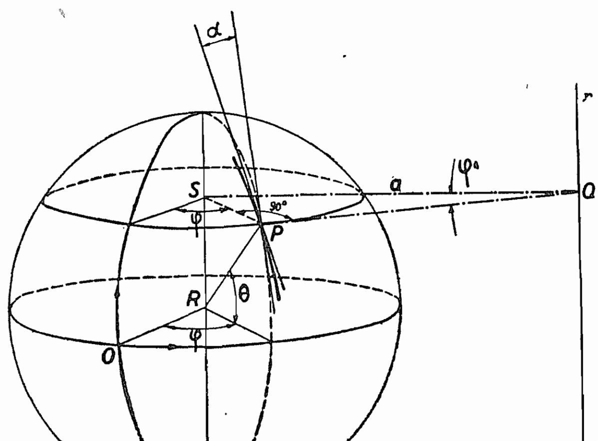

Fig. 1

punto de tangencia de la generatriz del conoide en ese plano, en el que se tiene

$$\rho = R \cos \vartheta$$

y en el triángulo PQS

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{R \cos \vartheta}{a}$$

o sea

$$\varphi = \operatorname{arc\,sen} \frac{R \cos \vartheta}{a} \qquad (1)$$

ecuación de la curva de contacto.

Para cada punto de la curva (1), se puede determinar la dirección de la tangente por el ángulo que forma con la tangente al meridiano de la esfera que pasa por el punto. Designando con α este ángulo, para un incremento $d\vartheta$ del ángulo ϑ se tiene un nuevo punto de la curva, sea P', al que corresponden las coordenadas ($\vartheta + d\vartheta$; $\varphi + d\varphi$), y considerando el triángulo equiparable a un triángulo rectángulo plano que se forma en la superficie esférica y uno de cuyos lados es PP', siendo los otros dos parte del meridiano que pasa por P', de medida $R d\vartheta$, y parte del paralelo por P, de medida $R \cos \vartheta d\varphi$, se tiene

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R \cos \vartheta \, d\varphi}{R \, d\vartheta} = \cos \vartheta \, . \, \frac{d\varphi}{d\vartheta}$$

y teniendo en cuenta (1)

$$\alpha = \operatorname{arc} . \operatorname{tg} \frac{- R \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 - R^2 \cos^2 \vartheta}} .$$

De igual manera se resolvería el problema analíticamente, si en vez de una superficie esférica se tratara de una superficie de revolución (fig. 2).

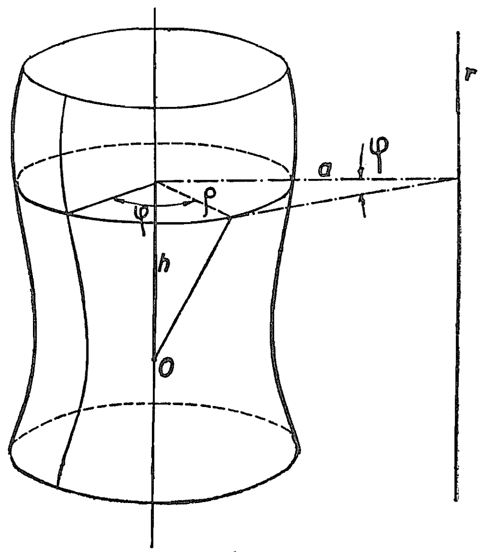

Fig. 2

Fijado como origen de ordenadas un punto sobre el eje de esta superficie, sea

$$\rho = \rho\,(h)$$

la ecuación de la sección meridiana. Utilizando el mismo simbolismo que para la esfera se tiene,

$$\varphi = \text{arc . sen}\,\frac{\rho}{a}$$

y siendo, como antes, α el ángulo de la tangente en el punto de la curva de contacto de la superficie con el conoide circunscripto y la sección meridiana que pasa por dicho punto, se tiene, repitiendo el razonamiento anterior

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho \, d\varphi}{ds}$$

siendo ds la diferencial del arco de la sección meridiana de la superficie de revolución. Luego

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho \, d\varphi}{\sqrt{1+\rho'^2} \, dh}$$

o sea

$$\alpha = \operatorname{arc.tg} \frac{\rho \, \rho'}{\sqrt{1+\rho'^2} \sqrt{a^2-\rho^2}}.$$

En el caso particular de la esfera, se tendría

$$\rho = \sqrt{R^2 - h^2} \qquad \rho' = -\frac{h}{\sqrt{R^2 - h^2}}$$

y por consiguiente, haciendo operaciones y poniendo $R^2 - h^2 = R^2 \cos^2 \vartheta$, queda

$$\alpha = \operatorname{arc.tg} \frac{-R \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 - R^2 \cos^2 \vartheta}}$$

que coincide con la hallada directamente.

Eduardo Gaspar