SOBRE UNA PROPIEDAD DE LAS SECCIONES CONICAS VERDADERAS CON CENTRO

por W. Mächler, Valparaíso (Chile)

Teorema: Sea $A_0 A_1 \ldots A_{v-1} A_v A_{v+1} \ldots A_n$ una línea poligonal cuyos vértices A_v ($v = 0, 1, 2, \ldots, n$) estén sobre una $\begin{cases} \text{elipse} \\ \text{rama de hipérbola} \end{cases}$ con el centro C y los ejes $2a$, $2b$. Si se coordina al vector $\mathfrak{p}_v = \overrightarrow{A_{v-1} A_v}$ el vector $\mathfrak{q}_v = \overrightarrow{CS_v}$ ($v = 1, 2, \ldots, n$) de modo que

I) $\mathfrak{p}_v$ y $\mathfrak{q}_v$ sean conjugados respecto a la $\begin{cases} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{cases}$

II) valga la relación $\mathfrak{p}_v \wedge \mathfrak{q}_v = -(\mathfrak{p}_{v+1} \wedge \mathfrak{q}_{v+1})$ (*)

$(v = 1, 2, \ldots, n-1)$

entonces las rectas $S_v S_{v+1}$ ($v = 1, 2, \ldots, n-1$) determinadas por los vértices sucesivos de la línea poligonal $S_1 S_2 \ldots S_v S_n$ son tangentes de una $\begin{cases} \text{elipse} \\ \text{hipérbola} \end{cases}$ que resulta respectivamente de la elipse o de la hipérbola conjugada a la hipérbola dada por una homotecia con el centro C y la razón de homotecia absoluta $\dfrac{|\mathfrak{p}_1 \wedge \mathfrak{q}_1|}{2ab}$.

Demostración:

A) Caso de la elipse.

Demos la elipse por la ecuación vectorial

$$\mathfrak{r}(\varphi) = \mathfrak{a} \cos\varphi + \mathfrak{b} \operatorname{sen}\varphi \qquad [1]$$

con $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = 0$ (*) y $0 \leqq \varphi < 2\pi$. Podemos tomar $|\mathfrak{a}| \geqq |\mathfrak{b}|$, incluyendo de este modo también el caso especial de la circunferencia. Pongamos $\overrightarrow{CA_v} = \mathfrak{r}(\varphi_v) = \mathfrak{r}_v$. Los vectores

$$\overrightarrow{A_{v-1} A_v} = \mathfrak{p}_v = \mathfrak{r}_v - \mathfrak{r}_{v-1} \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{q}_v = \lambda_v (\mathfrak{r}_{v-1} + \mathfrak{r}_v)$$

(*) $\wedge$ Producto vectorial; $\times$ producto escalar.

satisfacen a la condición I). La condición II) la podemos escribir en la forma

$$\mathfrak{p}_v \wedge \mathfrak{q}_v = (-1)^v \, 2\, k\, (\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}) \tag{2}$$

donde k es una constante. De [1] obtenemos

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_v &= \mathfrak{a}\,(\cos \varphi_v - \cos \varphi_{v-1}) + \mathfrak{b}\,(\operatorname{sen} \varphi_v - \operatorname{sen} \varphi_{v-1}) \\ \frac{1}{\lambda_v}\,\mathfrak{q}_v &= \mathfrak{a}\,(\cos \varphi_{v-1} + \cos \varphi_v) + \mathfrak{b}\,(\operatorname{sen} \varphi_{v-1} + \operatorname{sen} \varphi_v) \end{aligned} \tag{3}$$

y substituyendo en [2] resulta

$$\lambda_v = (-1)^v\, k\, \frac{1}{\operatorname{sen}(\varphi_{v-1} - \varphi_v)}$$

luego

$$\mathfrak{q}_v = (-1)^v\, k\, \frac{\mathfrak{r}_{v-1} + \mathfrak{r}_v}{\operatorname{sen}(\varphi_{v-1} - \varphi_v)} \tag{4}$$

suponiendo $|\varphi_{v-1} - \varphi_v| \neq \pi$.

Con las abreviaturas

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \frac{1}{2}\,(\varphi_{v-1} + \varphi_v) \\ \beta_v &= \frac{1}{2}\,(\varphi_{v-1} - \varphi_v) \end{aligned} \tag{5}$$

obtenemos mediante [4], [2]

$$\mathfrak{q}_v = (-1)^v\, k\, \frac{\mathfrak{r}(\beta_v)}{\operatorname{sen} \alpha_v} \tag{6}$$

que tiene sentido también para $|\varphi_{v-1} - \varphi_v| = \pi$.

La ecuación vectorial de la recta de la cual $\mathfrak{q}_v$ y $\mathfrak{q}_{v+1}$ $(v = 1, 2, \ldots, n-1)$ son radios vectores de dos de sus puntos es

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{q}_v + \sigma\,(\mathfrak{q}_{v+1} - \mathfrak{q}_v), \tag{7}$$

con σ como parámetro.

Demostramos a continuación que existen sobre el soporte del vector $\mathbf{a}$ dos puntos F_1, F_2 con los radios vectores $\mathbf{s} = \mu k \mathbf{a}$ y $-\mathbf{s}$ de modo que el producto P de las distancias algebraicas de los puntos F_1, F_2 a la recta [7] sea independiente de v y positivo, eligiendo μ convenientemente. Por esto vemos pues que las rectas [7] con $v = 1, 2, \ldots, n - 1$ son tangentes de una misma elipse con los focos F_1, F_2.

Sean $\mathbf{s} + \mathbf{v}_{v1}$ y $-\mathbf{s} + \mathbf{v}_{v2}$ los radios vectores de los piés de las perpendiculares de F_1, F_2 a la recta [7]. Tenemos

$$\mathbf{v}_{v1} = -(\mathbf{s} - \mathbf{q}_v) + \frac{(\mathbf{s} - \mathbf{q}_v) \times (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)}{(\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)^2} (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)$$

$$\mathbf{v}_{v2} = \mathbf{s} + \mathbf{q}_v - \frac{(\mathbf{s} + \mathbf{q}_v) \times (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)}{(\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)^2} (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)$$

y el producto P de las distancias algebraicas arriba mencionadas puede escribirse en la forma siguiente

$$P = \mathbf{v}_{v1} \times \mathbf{v}_{v2} = \frac{\mathbf{q}_v^2 \mathbf{q}_{v+1}^2 - (\mathbf{q}_v \times \mathbf{q}_{v+1})^2 - \mathbf{s}^2 (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)^2 + (\mathbf{s} \times (\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v))^2}{(\mathbf{q}_{v+1} - \mathbf{q}_v)^2}. \qquad [8]$$

Con las abreviaturas

$$Q_v = \operatorname{sen} \alpha_v \cos \beta_{v+1} + \operatorname{sen} \alpha_{v+1} \cos \beta_v$$

$$R_v = \operatorname{sen} \alpha_v \operatorname{sen} \beta_{v+1} + \operatorname{sen} \alpha_{v+1} \operatorname{sen} \beta_v \qquad [3]$$

$$\eta = \frac{|\mathbf{a}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{a}{b}$$

y tomando en cuenta las relaciones

$$\beta_v - \beta_{v+1} = \alpha_v + \alpha_{v+1}$$

$$Q_v^2 + R_v^2 = \operatorname{sen}^2 (\beta_v - \beta_{v+1}) \qquad [10]$$

obtenemos con [6], [9], [10] por substitución en [8],

$$P = (k\,b)^2 \frac{Q_v^2 + (1 - \mu^2) R_v^2}{Q_v^2 + \eta^2 R_v^2}. \qquad [11]$$

Eligiendo

$$\mu^2 = 1 - \eta^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

resulta con [11]

$$P = (k\,b)^2$$

independiente de v. La elipse cuyos focos tienen los radios vectores $\pm \mu k\,\mathfrak{a}$ y cuyo eje menor es $2|k|b$ tiene las rectas [7] con $v = 1, 2, \ldots, n - 1$ como tangentes. Como $\mu = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$, el eje mayor es $2|k|a$. Con esto queda demostrado el teorema en el caso de la elipse. Para $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|$ tenemos el caso especial de la circunferencia.

B) Caso de la hipérbola.

Con las denominaciones arriba introducidas y la ecuación vectorial de una rama de la hipérbola

$$\mathfrak{r}(\varphi) = \mathfrak{a} \cosh \varphi + \mathfrak{b} \operatorname{senh} \varphi$$

siendo $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = 0$, $-\infty < \varphi < \infty$, obtenemos

$$\mathfrak{q}_v = (-1)^v k \frac{\mathfrak{r}(\beta_v)}{\operatorname{senh} \alpha_v}. \qquad (v = 1, 2, \ldots, n).$$

Poniendo en el caso presente

$$\mathfrak{s} = \mu k\,\mathfrak{b}$$

$$Q_v = \operatorname{senh} \alpha_v \operatorname{senh} \beta_{v+1} + \operatorname{senh} \alpha_{v+1} \operatorname{senh} \beta_v$$

$$R_v = \operatorname{senh} \alpha_v \cosh \beta_{v+1} + \operatorname{senh} \alpha_{v+1} \cosh \beta_v$$

$$\eta = \frac{b}{a}$$

y observando que

$$\beta_v - \beta_{v+1} = \alpha_v + \alpha_{v+1}$$

$$-R_v^2 + Q_v^2 = \operatorname{senh}^2 (\beta_v - \beta_{v+1})$$

resulta

$$P = -(k\,a)^2 \frac{R_v^2 + (\mu^2 - 1)\,Q_v^2}{R_v^2 + \frac{1}{\eta^2}\,Q_v^2}.$$

Para

$$\mu^2 - 1 = \frac{1}{\eta^2} \quad \text{sea} \quad \mu = \frac{1}{b}\sqrt{a^2 + b^2},$$

la expresión para P es independiente de v y tiene el valor

$$P = -(k\,a)^2.$$

Como $P < 0$ y $P + (\mu\, k\, b)^2 = (k\, b)^2 > 0$, las rectas [7] con $v = 1, 2, \ldots, n - 1$ son tangentes a una hipérbola cuyos focos tienen los radios vectores $\pm \mu k$ **b** y cuyo eje transverso es $2|k|b$. Su eje nó transverso es pues $2|k|a$. Luego esta hipérbola es homotética a la hipérbola conjugada de la hipérbola dada respecto a C como centro y la razón de homotecia es k.

Nota: 1º) Si A_{v-1} tiende a A_v sobre la $\left\{\begin{array}{l}\text{elipse}\\ \text{hipérbola}\end{array}\right.$ el valor absoluto del vector $\mathfrak{q}_v$ tiende a ∞ y la posición límite de su soporte es la recta CA_v. Esto tiene interés si se quiere aplicar el teorema a una línea poligonal cerrada con un número impar de lados, pudiendo conservar de esta manera la ''condición de alternación'' II.

2º) Si los vértices A_v de la línea poligonal $A_0 \ldots A_v \ldots A_n$ están sobre una circunferencia se puede demostrar el teorema fácilmente por una consideración geométrica directa, tomando respecto a A_v como centro una transformación por radios recíprocos que transforma los puntos A_{v-1}, A_{v+1} en los puntos A'_{v-1}, A'_{v+1} y girando después los vectores $A_v A'_{v-1}$, $A_v A'_{v+1}$ en el mismo sentido en el ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor de A_v.

17 de Agosto 1942.

W. Mächler,
Valparaíso (Chile)
Universidad técnica