SOBRE LA APLICACION DE LAS DIFERENCIAS FINITAS EN LA DERIVACION SUCESIVA DE LAS FUNCIONES COMPUESTAS

(Tema Nº 28, Vol. VII, pág. 80)

El símbolo de las diferencias finitas puede aplicarse eficazmente en la derivación de las funciones compuestas y permitir una expresión explícita de las mismas. En efecto, si $\Delta p = 1$ se obtiene la identidad

$$\Delta^n \left(1 + \frac{k}{u}\right)^p = \left(\frac{k}{u}\right)^n \left(1 + \frac{k}{u}\right)^p \qquad \text{de donde}$$

$$k^n = u^{n+p} (u+k)^{-p} \Delta^n (u+k)^p u^{-p}.$$

Si se aplica esta expresión en el desarrollo de Taylor de una función de dos variables (lo mismo si son más de dos)

$$f(u+k, v+k') = \sum_{r=0} \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial f}{\partial u} k + \frac{\partial f}{\partial v} k'\right)^{(r)} \qquad \text{se obtiene}$$

$$(u+k)^p (v+k')^q f(u+k, v+k') =$$
$$u^p v^q \sum_{r=0} \frac{1}{r!} \left(u \frac{\partial f}{\partial u} \Delta_1 + v \frac{\partial f}{\partial v} \Delta_2\right)^{(r)}$$

donde, para las diferencias, los exponentes significan órdenes de diferencias y éstas se aplican a la expresión

$$u^{-p} v^{-q} (u+k)^p (v+k')^q$$

con $\Delta_1 p = \Delta_2 q = 1$.

Si ahora se supone que u y v son funciones de x e indicamos con D el símbolo de derivación respecto de esta última variable tendremos, aplicando nuevamente el desarrollo de Taylor e igualando los términos de igual potencia del incremento de la variable

$$D^n u^p v^q f(u,v) = u^p v^q \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!}\left(u \frac{\partial f}{\partial u} \Delta_1 + v \frac{\partial f}{\partial v} \Delta_2 \right)^{(r)},$$

donde las diferencias se aplican ahora a $u^{-p} v^{-q} D^n u^p v^q$.

La expresión explícita será pues

$$D^n u^p v^q f(u,v) = u^p v^q \sum_{0 \leqq r+s \leqq n} \frac{u^r v^s}{r!\, s!} f_{r,s}^{(r+s)} \Delta_1{}^r \Delta_2{}^s u^{-p} v^{-q} D^n u^p v^q$$

donde, por comodidad $\qquad f_{r,s}^{(r+s)} = \dfrac{\partial^{r+s} f}{\partial u^r \partial v^s}$.

La fórmula anterior es especialmente cómoda cuando u y v son funciones elementales, como lo muestran los siguientes ejemplos:

1º.) Si $u = x^h$ y $v = x^k$ con $hp + kq = m$

$$D^n x^m f(x^h, x^k) =$$

$$= x^{m-n} \sum_{0 \leqq r+s \leqq n} \frac{x^{hr+ks}}{r!\, s!} f_{r,s}^{(r+s)} \Delta_1{}^r \Delta_2{}^s m^{(n} \text{ con } \Delta_1 m = h \text{ y } \Delta_2 m = k.$$

Si h y k toman los valores 1 y — 1 respectivamente los símbolos de las diferencias pueden eliminarse. Así

$$D^n x^m f\left(x, \frac{1}{x}\right) =$$

$$= x^{m-n} \sum_{0 \leqq r+s \leqq n} \frac{x^{r-s}}{r!\, s!} f_{r,s}^{(r+s)} (-1)^s n^{(r+s} (m-s)^{(n-r-s}$$

donde $n^{(r}$ indica la factorial de base n, grado r y diferencia 1.

2º.) $D^n x^m f(l.\, x) = \lim\limits_{h \to 0} D^n x^m f \left(\dfrac{x^h - 1}{h}\right) =$

$$\lim_{h \to 0} x^{m-n} \sum_{r=0}^{n} \frac{x^{hr}}{h^r r!} f^{(r)} \Delta^r m^{(n} = x^{m-n} \sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(r)}}{r!} \frac{d^r m^{(n}}{dm^n}$$

que puede escribirse

$$D^n x^m f(l.\, x) = x^{m-n}\, (f + m)^{(n}$$

donde se sustituyen los exponentes de f por órdenes de derivación.

Esta fórmula, para $m = 0$, está en CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse Infinitesimale* (5ª. ed.), tomo I, pág. 91.

Para $m = n$ y $f(l.\, x) = l.\, x$ se llega a este resultado curioso

$$D^n \frac{x^n\, l.\, x}{n!} = l.\, x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Compruebe el lector la igualdad de este resultado con el que se obtiene aplicando al primer miembro la fórmula de Leibniz.

3º.) $D^n \operatorname{arc\,sen} x = D^{n-1} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} =$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{(r} (-1)^r}{r!} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2} - r}\, x^{2r-n+1}\, \Delta^r 0^{(n-1}$$

con $\Delta 0 = 2$ de donde

$$\sqrt{1 - x^2}^{\,2n-1}\, D^n \operatorname{arc\,sen} x =$$

$$= \sum_{r \geq \frac{n-1}{2}}^{n-1} \binom{-\frac{1}{2}}{r} (-1)^r x^{2r+1-n}\, (1 - x^2)^{n-r-1}\, \Delta^r 0^{(n-1}$$

pues $\Delta^r 0^{(n-1} = 0$ para $r < \dfrac{n-1}{2}$.

4º.) $D^n \operatorname{arctg} x = D^{n-1} (1 + x^2)^{-1} =$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^{(r}}{r!}\, x^{2r+1-n}\, (1 + x^2)^{-1-r}\, \Delta^r 0^{(n-1}$$

con $\Delta\, 0 = 2$, de donde

$$(1 + x^2)^n D^n \operatorname{arctg} x = \sum_{r \geq \frac{n-1}{2}}^{n-1} (-1)^r x^{2r+1-n} (1 + x^2)^{n-r-1} \Delta^r 0^{(n-1}.$$

5º.) Con las exponenciales se obtienen resultados semejantes a los obtenidos con las funciones de potencia. Si $u = e^{hx}$ y $v = e^{kx}$ con $hp + kq = m$.

$$D^n e^{mx} f(e^{hx}, e^{kx}) = e^{mx} \sum_{0 \leq r+s \leq n} \frac{e^{(hr+ks)x}}{r!\, s!} f_{r,s}^{(r+s)} \Delta_1{}^r \Delta_2{}^s m^n$$

con $\Delta_1 m = h$ y $\Delta_2 m = k$.

Si $h + k = 0$

$$\Delta_1{}^r \Delta_2{}^s m^n = (-1)^s \Delta^{r+s} (m - hs)^n \quad \text{con } \Delta m = h.$$

6º.) Por lo tanto tendremos

$$D^n e^{mxi} \varphi\left(e^{hxi}, e^{-hxi}\right) =$$

$$= i^n \sum_{0 \leq r+s \leq n} \frac{\varphi_{r,s}^{(r+s)}}{r!\, s!} e^{[m+h(r-s)]xi} (-1)^s \Delta^{r+s} (m - hs)^n$$

Si $\varphi(e^{hxi}, e^{-hxi}) = f(\operatorname{sen} hx)$; $\varphi_{r,s}^{(r+s)} = (-1)^s (2i)^{-r-s} f^{(r+s)}$.

Sustituyendo, transformando e igualando, por ejemplo, las partes reales

$$D^n \cos mx\, f(\operatorname{sen} hx) =$$

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(r)}}{2^r r!} \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \cos\left[(m + h(r - 2s))\, x + \frac{\pi}{2}(n - r)\right] \Delta^r (m - hs)^n.$$

Igualando las partes imaginarias se obtendrá la expresión para $\operatorname{sen} mx\, f(\operatorname{sen} hx)$ y en forma semejante para

$\cos mx\, f(\operatorname{sen} hx)$ y $\operatorname{sen} mx\, f(\cos hx)$ y para las expresiones correlativas con funciones hiperbólicas.

7°.) Por otra parte

$$D^n e^{mxi}\, \varphi(e^{2hxi}) = i^n \sum_{s=0}^{n} \frac{\varphi^{(s)}}{s!}\, e^{(m+2hs)xi}\, \Delta^s m^n \quad \text{con } \Delta m = 2h$$

y si

$$\varphi(e^{2hxi}) = F\left(\frac{1}{1+e^{2hxi}}\right) = f\left(\frac{2i}{1+e^{2hxi}} - i\right) = f(\operatorname{tg} hx)$$

$$\varphi^{(s)} = \sum_{r=0}^{s} \frac{(-1)^r F^{(r)}}{r!}\, \frac{s^{(r}\,(-r)^{(s-r}}{(1+e^{2hxi})^{s+r}} =$$

$$= \frac{s!}{2^s} \sum_{r=0}^{s} \frac{f^{(r)}}{r!} \binom{-r}{s-r} \frac{e^{-hxi(s+r)}}{i^r \cos^{r+s} hx}$$

por lo tanto, sustituyendo, transformando e igualando, por ejemplo, las partes reales

$$D^n \cos mx\, f(\operatorname{tg} hx) =$$

$$\sum_{r=0}^{n} \frac{f^{(r)}}{2^r r!} \sum_{s=0}^{n-r} \binom{-r}{s} \frac{\cos\left[(m+hs)x + \frac{\pi}{2}(n-r)\right]}{2^s \cos^{2r+s} hx}\, \Delta^{r+s} m^n$$

e igualmente se obtendrá, igualando las partes imaginarias, la expresión correspondiente a $\operatorname{sen} mx\, f(\operatorname{tg} hx)$ así como, en forma análoga, las expresiones correlativas correspondientes a las funciones hiperbólicas.

José Babini