# UNA FORMULA INTEGRAL REFERENTE A FIGURAS CONVEXAS

(Tema Nº 31, Vol. VII, pág. 109)

---

El tema propuesto con el nº. 31 en el vol. VII, pág. 109, de esta *Revista*, decía:

Se sabe que en la teoría de probabilidades geométricas la posición de una recta $G$ del plano se determina por su distancia $p$ a un punto fijo $O$ y el ángulo $\varphi$ que la normal a la recta desde $O$ forma con una dirección fija. Además, para medir un conjunto de rectas se toma la integral doble de la expresión $dG = dp\,d\varphi$ que se llama *densidad de rectas*.

Sentado esto, consideremos una figura plana convexa $K$. Llamemos $\sigma$ a la longitud de la cuerda que la recta $G$ determina en ella y $\alpha_1, \alpha_2$ a los ángulos (menores que $\pi$) que $G$ forma con las tangentes a $K$ en los extremos de dicha cuerda. Suponiendo que el contorno de la figura $K$ tiene en todo punto tangente determinada y que carece de segmentos rectilíneos, demostrar que

$$\int \frac{\sigma}{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2} dG = \frac{1}{2} L^2 \tag{1}$$

siendo $L$ la longitud de $K$ y estando la integración extendida a todas las rectas $G$ que cortan a $K$.

1. *Solución*. Tomando sobre el contorno de la figura convexa $K$ un origen $P$ de arcos, cada punto $A$ del mismo estará determinado por la longitud $s$ del arco $PA$. De esta manera toda recta $G$ que corte a $K$ estará determinada por las abscisas curvilíneas $s_1, s_2$ de sus puntos de intersección con el contorno. En las hipótesis del enunciado, de que el contorno de $K$ no contiene segmentos de recta, la correspondencia entre las rectas $G$ que cortan a $K$ y los pares de puntos $s_1, s_2$ es biunívoca. Por consiguiente es posible expresar la densidad de rectas en función de los nuevos parámetros $s_1, s_2$ en lugar de los ordinarios $p, \varphi$.

Queremos, pues, expresar la forma diferencial $dG = dp\, d\varphi$ en las nuevas variables $s_1, s_2$. Para ello procederemos en dos etapas. Supongamos primero que solamente queremos cambiar la variable $p$ por la $s_1$, conservando $\varphi$. Tomando un sistema de coordenadas rectangulares y llamando $x_1, y_1$ a las coordenadas del punto correspondiente a $s_1$, las fórmulas de transformación son

$$\begin{aligned} p &= x_1 \cos \varphi + y_1 \operatorname{sen} \varphi \\ \varphi &= \varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

De la primera se deduce

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} = x'_1 \cos \varphi + y'_1 \operatorname{sen} \varphi$$

indicando los acentos derivados de las funciones $x_1 = x_1(s_1)$, $y_1 = y_1(s_1)$ (que son las ecuaciones paramétricas del contorno de $K$) respecto el arco $s_1$. Llamando $\vartheta_1$ al ángulo que forma la tangente a $K$ en el punto $s_1$ con el eje $x_1$, es $x'_1 = \cos \vartheta_1$, $y'_1 = \operatorname{sen} \vartheta_1$ y por tanto $\dfrac{\partial p}{\partial s_1} = \cos(\vartheta_1 - \varphi)$ y siendo $\alpha_1$, según el enunciado, el ángulo de la recta $G$ con la tangente es $\vartheta_1 - \varphi = \dfrac{\pi}{2} - \alpha_1$ y por tanto $\dfrac{\partial p}{\partial s_1} = \operatorname{sen} \alpha_1$. Por consiguiente, el cambio de variables definido por (2) da

$$dG = dp\, d\varphi = \operatorname{sen} \alpha_1\, ds_1\, d\varphi. \tag{3}$$

Para introducir la abscisa curvilínea $s_2$ del segundo punto de intersección de $G$ con el contorno de $K$, observemos que siendo $x_2, y_2$ las coordenadas de este segundo punto, las fórmulas de transformación serán

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arc\,tg} \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \\ s_1 &= s_1. \end{aligned} \tag{4}$$

De aquí

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = \frac{-(y_2 - y_1)x'_2 - (x_1 - x_2)y'_2}{(y_2 - y_1)^2 + (x_1 - x_2)^2}.$$

Siendo $\sigma$ la cuerda que $G$ determina en $K$, el denominador de esta expresión es $\sigma^2$ y en cuanto al numerador es igual al momento de la recta que pasa por el punto $x_2, y_2$ y cuyos cosenos directores son $x'_2$, $y'_2$ (o sea, la tangente al contorno de $K$ en $s_2$) respecto el punto $x_1, y_1$. Por tanto, siendo $\alpha_2$ el ángulo que forma la tangente a $K$ en $s_2$ con la recta $G$, es

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_2}{\sigma}.$$

Con esto, de (3) y de (4) se deduce la nueva expresión buscada para la densidad de rectas del plano:

$$dG = \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2}{\sigma} ds_1 ds_2. \tag{5}$$

Esta expresión se puede escribir

$$\frac{\sigma}{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2} dG = ds_1 ds_2 \tag{6}$$

e integrando sobre todas las rectas que cortan a K y teniendo en cuenta que al integrar $s_1$ y $s_2$ a toda la longitud $L$ de $K$ cada recta habrá venido contada dos veces, resulta la fórmula (1) del enunciado.

2. *Generalización.* El resultado anterior no es válido cuando el contorno de $K$ contiene segmentos de recta. Ello es debido a que en tal caso los pares de puntos de un mismo segmento determinan la misma recta y por tanto la correspondencia entre las rectas y los pares $s_1, s_2$ no es biunívoca. Veamos cómo se puede proceder en este caso.

Supongamos que el contorno de $K$ contenga $n$ segmentos de recta de longitudes $a_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$. La fórmula (6) será aplicable siempre y cuando $s_1$ y $s_2$ no correspondan a puntos de un mismo segmento. Por tanto, para calcular la integral del primer miembro, extendida a todas las rectas que cortan a $K$, deberemos integrar el segundo miembro a todas las posiciones de $s_1$ y $s_2$ que no pertenecen a un mismo segmento de recta del contorno. Por tanto, fijado $s_1$, si pertenece a un segmento de recta $a_i$, $s_2$ podrá variar a todo el contorno menos a este segmento, o sea la integral de $ds_2$ valdrá $L - a_i$. Si $s_1$ no pertenece a ningún segmento, sino a una parte curvilínea del contorno de $K$, $s_2$ podrá variar a todo el contorno y la integral de $ds_2$ valdrá $L$. Por tanto la integral del segundo miembro de (6) extendida a todos los valores de $s_1, s_2$ que no pertenecen a un mismo segmento del contorno de $K$, vale

$$\Sigma (L - a_i) a_i + (L - \Sigma a_i) L = L^2 - \Sigma a_i^2,$$

donde la sumatoria indica que hay que sumar a todos los segmentos $a_i$.

De esta manera, lo mismo que antes, cada recta viene contada dos veces, pues los puntos $s_1, s_2$ pueden permutarse entre sí sin cambiar la recta, y por tanto queda, en definitiva,

$$\int \frac{\sigma}{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2} dG = \frac{1}{2} (L^2 - \Sigma a_i^2). \tag{7}$$

Esta fórmula generaliza la del enunciado del tema propuesto. La integración del primer miembro está extendida a todas las rectas que cortan a $K$ y la fórmula es válida para cualquier figura convexa, siendo $L$ su longitud total y $a_i$ las longitudes de los segmentos rectilíneos de su contorno. Si el contorno no contiene segmentos rectilíneos queda la fórmula (1) del enunciado.

3. *Generalización al espacio.* En la teoría de Probabilidades Geométricas, una recta del espacio se determina por el elemento de área $d\Omega$ determinado sobre la esfera de radio unidad por un radio paralelo a la recta, más el elemento de área $dx\,dy$ correspondiente al punto de intersección de la recta por un plano normal [1]. Es decir

$$dG = dx\,dy\,d\Omega. \tag{8}$$

Supongamos un cuerpo convexo $K$ cuya superficie tenga plano tangente determinado en cada punto y no contenga caras planas. Sean $df_1, df_2$ los elementos de área de la superficie de $K$ correspondientes a los puntos de su intersección con $G$;

representaremos también por $f_1, f_2$ a estos puntos. Siendo $dx\,dy$ el elemento de área correspondiente a un plano normal a $G$ y llamando $\alpha_1$ al ángulo que forma $G$ con la normal a la superficie de $K$ en $f_1$, es $dx\,dy = \cos\alpha_1\, df_1$ y por tanto (8) se puede escribir en la forma conocida

$$dG = \cos\alpha_1\, df_1\, d\Omega. \tag{9}$$

Considerando la superficie esférica de centro el punto $f_1$ y radio la cuerda $\sigma$ que la recta $G$ determina en $K$, el elemento de área de la misma será $\sigma^2 d\Omega$ y al proyectar sobre ella el elemento $df_2$, llamando $\alpha_2$ al ángulo que forma la recta $G$ con la normal a $K$ en $f_2$ será $\sigma^2 d\Omega = \cos\alpha_2\, df_2$. Despejando de aquí $d\Omega$ y sustituyendo en (9), queda

$$dG = \frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sigma^2}\, df_1\, df_2. \tag{10}$$

Pasando el coeficiente del segundo miembro al primero e integrando a todas las rectas que cortan a $K$, se tiene, como fórmula análoga del espacio a la (1) del enunciado

$$\int \frac{\sigma^2}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}\, dG = \frac{1}{2} F^2 \tag{11}$$

siendo $F$ el área de $K$.

Si la superficie de K tiene caras cuyas áreas sean $a_i$, procediendo exactamente igual que en el caso del plano, se obtiene

$$\int \frac{\sigma^2}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}\, dG = \frac{1}{2}(F^2 - \Sigma\, a_i^2),$$

extendida como siempre la integración a todas las rectas $G$ que cortan al cuerpo convexo $K$ y siendo $\sigma$ la longitud de la cuerda que $G$ determina en $K$ y $\alpha_1, \alpha_2$ los ángulos que forma $G$ con las normales a $K$ en los puntos de intersección.

*Luis A. Santaló*

---

(1) Ver por ej. DELTHEIL *Probabilités géométriques*, Gauthier-Villars, París, 1926, pág. 90.