# SOBRE LA SUMA $\sum\limits_{r=1}^{n} r^{xz-1}[(n+1)^z - r^z]^{y-1}$

(Tema Nº 22, Vol. VII, p. 29)

---

Se proponía en el tema nº. 22 (Vol. VII, pág. 29) calcular para $n \to \infty$ el límite de la suma $l^m n^m + 2^m (n-1)^m + \ldots + n^m 1^m$ para los diversos valores del parámetro real $m$. Generalización.

Consideremos la expresión generalizada

$$\sum_{r=1}^{n} r^{xz-1}[(n+1)^z - r^z]^{y-1}$$

con $x, y$ reales y $z > 0$, que para $x = y = 1 + m$ y $z = 1$ se convierte en la suma propuesta, y calculemos su límite, para $n \to \infty$, en los puntos del plano $x, y$.

Como la sumatoria, por ser de términos positivos, es mayor que cualquiera de ellos, tendremos que para $y > 1$ esa sumatoria es mayor que su primer término que tiende a infinito. Para $y = 1$, en cambio, la sumatoria se convierte en una serie armónica y será por lo tanto, divergente para $x \geqq 0$ y convergente para $x < 0$ y de valor $\zeta(1 - xz)$ siendo $\zeta(s)$ la función de Riemann.

Para calcular el límite en la zona $0 < y < 1$ escribamos la sumatoria en la forma

$$(n+1)^{z(x+y-1)} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{r}{n+1}\right)^{xz-1} \left[1 - \left(\frac{r}{n+1}\right)^z\right]^{y-1} \frac{1}{n+1}$$

donde la suma que figura como segundo factor tiene por límite la integral

$$\int_0^1 u^{xz-1}(1-u^z)^{y-1}du = \frac{1}{z}\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv$$

finita para $x$ e $y$ positivos; por lo tanto en la zona $0 < y < 1$ si $x + y > 1$ la sumatoria propuesta tenderá a infinito; si $x + y = 1$ tenderá a un límite finito igual a

$$\frac{1}{z} B(x,y) = \frac{1}{z} \pi(x)\, \pi(1-x) = \frac{\pi}{z \operatorname{sen} \pi x}$$

mientras que en el triángulo

$$x+y<1; \qquad 0<y<1; \qquad 0<x<1.$$

ese límite será 0.

Si, siempre para $0<y<1$, es $x \leqq 0$ bastará considerar un punto $(x', y)$ tal que $x \leqq 0 < x' < 1$ y como en el punto $(x', y)$ la sumatoria tiene por límite 0 y es $r^{xz-1} \leqq r^{x'z-1}$, también en el punto $(x, y)$ ese límite será 0.

Para calcular el límite de la sumatoria en el semiplano $y \leqq 0$, escribamos, aplicando el teorema del valor medio, cada término de la sumatoria en la forma

$$z^{y-1}(n+1-r)^{y-1} r^{z(x+y-1)-y} \left(1+\vartheta \frac{n+1-r}{r}\right)^{(z-1)(y-1)}$$

y si $z(x+y-1)>y$ la sumatoria, por ser mayor que su último término $(r=n)$ que tiende a infinito, también tenderá a infinito.

Para $z(x+y-1)=y$ la sumatoria será, en cambio, mayor, igual o menor que $z^{y-1}\zeta(1-y)$ según sea $z \lesseqgtr 1$.

Y, por último, si $z(x+y-1)<y$ podremos pasar siempre del punto $(x, y)$ a un punto $(x', y')$ situado sobre la paralela a $z(x+y-1)=y$ y en la zona $0<y'<1$; $x'+y'<1$. Será entonces $zx-1 \lesseqgtr zx'-1$ según sea $z \lesseqgtr 1$, de donde $(z-1)(y-1) \lesseqgtr (z-1)(y'-1)$ y para todos los valores de $z$ $\quad (n-1-r)^{y-1} \leqq (n+1-r)^{y'-1}$ $\quad$ y

$$\left(1+\vartheta \frac{n+1-r}{r}\right)^{(z-1)(y-1)} < \left(1+\vartheta \frac{n+1-r}{r}\right)^{(z-1)(y'-1)}$$

por lo tanto la sumatoria en el punto $(x, y)$ será menor que en el punto $(x', y')$ y como en este último su límite es 0, también lo será en el $(x, y)$.

En definitiva el límite de la sumatoria depende de la posición del punto $(x, y)$ respecto de la poligonal $y=1$, $(x \leqq 0)$; $x+y=1$, $(0 \leqq x \leqq 1)$; $z(x+y-1)=y$, $(y \leqq 0)$. En la región del plano determinada por esa poligonal y que contiene el origen, ese límite es o, en la otra región, así como en los vértices de la poligonal, el límite es infinito, mientras que en la poligonal, excepto los vértices, ese límite será: $\zeta(1 - xz)$ para $y = 1$ y $\dfrac{\pi}{z \operatorname{sen} \pi x}$ para $x + y = 1$, mientras que para $y \leqq 0$ sólo podremos acotar la sumatoria que será mayor, igual o menor que $z^{1-y}\zeta(1 - y)$ según sea $z \lesseqgtr 1$.

Para $z = 1$ esa poligonal será simétrica respecto de la bisectriz del primer cuadrante y sobre los lados paralelos a los ejes el límite de la sumatoria será respectivamente $\zeta(1 - x)$ y $\zeta(1 - y)$. Si, además, $x = y = 1 + m$ (caso particular propuesto en el tema) tendremos que el límite será o para $m < 1/2$, la suma tenderá a infinito para $m > - 1/2$ y tendrá el valor $\pi$ para $m = - 1/2$.

Una generalización más simétrica es la del límite de $\sum_{r=1}^{n}[(n+1)^z - (n+1-r)^z]^{x-1}[(n+1)^z - r^z]^{y-1}$ que también para $z = 1$ y $x = y$ se convierte en la suma propuesta, pero en este caso sólo logramos demostrar, por el método de la integral, que su límite $l$ es, para $x > 0$, $y > 0$:

$$x + y > 2 - 1/z; \quad l = \infty$$

$$x + y = 2 - 1/z; \quad l = \int_0^1 [1 - (1 - u)^z]^{x-1}(1 - u^z)^{y-1} du$$

$$x + y < 2 - 1/z; \quad l = 0.$$

Es posible que para $z > 1/2$, lo mismo que en el caso anterior $z = 1$, la zona de separación de la convergencia y divergencia sea la poligonal $z(x + y - 2) = x - 1$, $(x \leqq 0)$; $z(x + y - 2) = - 1$, $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$; $z(x + y - 2) = y - 1$, $(y \leqq 0)$ que se reduce a la semirrecta $x = y \leqq 0$ para $z = 1/2$, mientras que para $z < 1/2$ la suma sería divergente para todo par de valores $x, y$.

*José Babini*

Nota. — Propusimos el tema 22 con el objeto principal de incitar a la resolución de este problema todavía pendiente en la teoría de series: obtener condiciones suficientes (a ser posible necesarias y suficientes) para que el cuadrado de una serie sea convergente.

El cuadrado de la serie armónica alternada $\Sigma\frac{(-1)^n}{n^s}$ convergente si $s>0$, es una serie alternada cuyo término general es la suma propuesta en el tema nº. 22 para $m=-s$. Esta serie, en virtud de la discusión anterior (o más breve y directamente limitándose al caso propuesto en el tema) converge para $1/2<s\leqq 1$ a pesar de que la convergencia de la serie dada es condicional; y por un clásico teorema de Abel es legítima la multiplicación efectuada.

La generalización realizada por el Sr. Babini, aun limitándola al caso $z=1$, confiere mayor interés a la cuestión, pues suministra ejemplos sencillos de series condicionalmente convergentes:

$$\Sigma\frac{(-1)^n}{n^{1-x}} \qquad \Sigma\frac{(-1)^n}{n^{1-y}} \qquad \begin{matrix} 0\leqq x<1 \\ 0\leqq y<1 \end{matrix}$$

cuyo producto converge si el punto $(x, y)$ es interior al triángulo así limitado en el polígono obtenido como campo de convergencia de la suma estudiada; quedando así resuelta una cuestión propuesta en la conocida obra de Knopp (3ª. ed., pág. 336) con mayor amplitud de la pedida.

El teorema de Mertens puede completarse muy sencillamente mediante el teorema fundamental de los algoritmos de convergencia (véase nuestra obra (*), pág. 48) demostrando que la convergencia absoluta es *necesaria* para la validez de la multiplicación por *toda* serie convergente; pero esto no implica contradicción con los ejemplos anteriores y queda en pie el problema de obtener algún criterio de más fácil aplicación que los propuestos en la citada obra de Knopp, para asegurar la convergencia de la suma producto de dos condicionalmente convergentes, aunque sólo sea en el caso más sencillo del cuadrado de una serie alternada.

*J. R. P.*

(1) *Teoría de los algoritmos de convergencia y de sumación.* Buenos Aires 1931