UN PROBLEMA DE ANALISIS INDETERMINADO

por SERGIO SISPÁNOV

Sea la ecuación indeterminada

$$x^3+y^3+z^3-3\,x\,y\,z=k\,t^3\,.$$

con cuatro incógnitas, siendo k un número entero arbitrario.

Dejando a un lado la solución trivial

$$x=y=z=0, \qquad t=0,$$

nos ocuparemos de las soluciones en que una de las incógnitas, por ejemplo, z es distinta de 0. Dividiendo por z^3 la ecuación propuesta y haciendo

$$\frac{x}{z}=\xi, \quad \frac{y}{z}=\eta, \quad \frac{t}{z}=w, \tag{1}$$

llegamos a la relación

$$F=\xi^3+\eta^3+1-3\,\xi\,\eta-k\,w^3=0. \tag{2}$$

Las fórmulas (1) nos indican que a los valores enteros de las incógnitas x, y, z, t les corresponden valores racionales de las incógnitas ξ, η, w, y viceversa.

En efecto, conociendo ciertos valores racionales de ξ, η, w podríamos reducirlos al mismo denominador e igualar z a dicho denominador multiplicado por un número entero arbitrario h. Los valores de x, y, t serán iguales a los numeradores respectivos multiplicados por el mismo número h.

De tal modo el problema queda reducido a la determinación de todas las soluciones racionales de la ecuación (2) que, representada geométricamente, corresponde a una superficie de 3er. orden con el punto múltiple 0_1 ($\xi=1$, $\eta=1$, $w=0$).

Para comprobar esto basta considerar las derivadas

$$F'_\xi=3\,(\xi^2-\eta), \qquad F'_\eta=3\,(\eta^2-\xi), \qquad F'_w=-3\,k\,w^2$$

que para las coordenadas del punto 0_1 arriba indicadas se anulan simultáneamente con la función F.

Si se traslada el sistema coordenado, tomando el punto 0_1 por origen y cambiando en 180° la dirección de los ejes de las abscisas y de las ordenadas, las fórmulas de paso serán

$$\xi = 1 - u, \qquad \eta = 1 - v \tag{3}$$

y la ecuación (2) en el nuevo sistema $0_1\, U\, V\, W_1$ toma la forma

$$u^3 + v^3 + k\, w^3 = 3\,(u^2 - u\, v + v^2). \tag{4}$$

Tracemos ahora el rayo $0_1 M$

$$u = \alpha\, w, \qquad v = \beta\, w \tag{5}$$

que sale del origen 0_1 y corta a la superficie (4) en un punto M.

Sustituyendo en la ecuación (4) u y v por sus expresiones (5) y simplificando por w^2, encontramos la aplicada

$$w = \frac{3\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k} \tag{6}$$

del punto M.

Las demás coordenadas del mismo punto se hallarán por las fórmulas (5) reemplazando en ellas w por su expresión re-ción obtenida y tendrán la forma

$$u = \frac{3\,\alpha\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k}, \qquad v = \frac{3\,\beta\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k}. \tag{7}$$

Por las relaciones (5) vemos que a los valores racionales de las coordenadas u, v, w les corresponden valores racionales de los coeficientes angulares α y β. Por el contrario, las fórmulas (6) y (7) nos indican que a los valores racionales de α y β les corresponden valores racionales de u, v, w.

De manera que todos los puntos racionales M de la superficie (4) se encontrarán atribuyendo a los coeficientes α y β diferentes valores racionales.

Para hallar las coordenadas antiguas de los puntos M servirán las relaciones

$$\xi = \frac{(\alpha^3 + \beta^3 + k) - 3\,\alpha\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k} = \frac{(\beta - \alpha)^3 - \alpha^3 + k}{\alpha^3 + \beta^3 + k}$$

$$\eta = \frac{(\alpha^3 + \beta^3 + k) - 3\,\beta\,(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)}{\alpha^3 + \beta^3 + k} = \frac{(\alpha - \beta)^3 - \beta^3 + k}{\alpha^3 + \beta^3 + k}$$

que se deducen de las fórmulas (3) sustituyendo u y v por sus iguales (7).

Si las expresiones recién halladas para ξ, η, y la expresión (6) para w se introducen en las relaciones (1), se llega a las siguientes igualdades

$$\frac{x}{z}=\frac{(\beta-\alpha)^3-\alpha^3+k}{\alpha^3+\beta^3+k}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{(\alpha-\beta)^3-\beta^3+k}{\alpha^3+\beta^3+k}$$

$$\frac{t}{z}=\frac{3\,(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^3+\beta^3+k}.$$

Supongamos ahora que los números racionales α y β, después de ser reducidos a mismo denominador, tienen la forma

$$\alpha=\frac{a}{c}, \qquad \beta=\frac{b}{c},$$

siendo a, b, c números enteros sin divisor común (tomándolos de dos en dos pueden no ser primos entre sí).

Reemplazando α y β por sus iguales en las fórmulas anteriores y multiplicando por c^3 los numeradores y los denominadores en los segundos miembros, encontramos

$$\frac{x}{z}=\frac{X}{Z}, \quad \frac{y}{z}=\frac{Y}{Z}, \quad \frac{t}{z}=\frac{T}{Z},$$

en donde

$$\left\{\begin{aligned} X &= (b-a)^3-a^3+k\,c^3 \\ Y &= (a-b)^3-b^3+k\,c^3 \\ Z &= a^3+b^3+k\,c^3 \\ T &= 3\,c\,(a^2-a\,b+b^2) \end{aligned}\right. \qquad (8)$$

Las relaciones obtenidas pueden representarse más cómodamente en forma de una serie de razones iguales del siguiente modo

$$\frac{x}{X}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}=\frac{t}{T}=\frac{h}{d},$$

siendo $\frac{h}{d}$ una fracción a que son iguales las cuatro razones y cuyos términos h y d son primos entre sí.

De la serie de razones iguales se deduce que

$$x=h\,.\frac{X}{d}\,,\quad y=h\,.\frac{Y}{d}\,,\quad z=h\,.\frac{Z}{d}\,,\quad t=h\,.\frac{T}{d}\,. \tag{9}$$

Como las incógnitas x, y, z, t deben ser enteras y h es primo con d, entonces este último número es un divisor de los números X, Y, Z, T.

Es evidente que igualando d al máximo común divisor de X, Y, Z, T y atribuyendo a h diferentes valores enteros, hallaremos todos los vâlores enteros de x, y, z, t, correspondientes a los números a, b, c. La solución en que todas las incógnitas son iguales a 0 no ofrece excepción y se obtiene haciendo $h=0$. Poniendo $h=1$ se llega a una solución en que las incógnitas x, y, z, t no tienen divisor común.

Para otros valores de los parámetros a, b, c las fórmulas (8) suministran otros valores para X, Y, Z, T y las igualdades (9) conducen a otros sistemas de soluciones.

Ocupémonos ahora más detenidamente del máximo común divisor d de los números X, Y, Z, T.

Conforme al teorema de *Fermat* el cubo de un entero es congruente a la primera potencia del mismo número por módulo 3. Teniendo en cuenta este resultado deducimos de las relaciones (8) las siguientes congruencias:

$$\left.\begin{aligned} X &\equiv (b-a)-a+kc \equiv a+b+kc \\ Y &\equiv (a-b)-b+kc \equiv a+b+kc \\ Z &\equiv a+b+kc \\ T &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{3}$$

Vemos que los números X, Y, Z son todos divisibles o no divisibles por 3, según que lo sea o no la suma $a+b+kc$.

Valiéndonos de las mismas igualdades (8) encontramos también que

$$\left\{\begin{array}{l} Z=(a+b)\,(a^2-ab+b^2)+kc^3 \\ Z-X=3\,a\,(a^2-ab+b^2) \\ Z-Y\ =3\,b\,(a^2-ab+\,b^2) \\ T=3\,c\,(a^2-ab+b^2). \end{array}\right. \qquad (10)$$

Supongamos, en primer lugar, que $a+b+kc$ no es divisible por 3 y demostremos que en tal ocasión el máximo común divisor d de los números X, Y, Z, T es igual al máximo común divisor de la forma a^2-ab+b^2 y del producto kc^3.

Sea d_1 uno de los divisores comunes de los números X, Y, Z, T. El divisor d_1 no puede ser divisible por 3, porque en el caso considerado X, Y, Z no son divisibles por 3.

Los primeros miembros de las fórmulas (10) son divisibles por d_1 y como a, b, c están elegidos de tal manera que no tengan factor común, entonces la forma a^2-ab+b^2 que figura en los segundos miembros de las tres últimas fórmulas debe ser divisible por d_1. La primera de las fórmulas (10) nos indica además que el término kc^3 es divisible por d_1.

Por el contrario, un divisor d_2 de a^2-ab+b^2 y de kc^3 es también divisor de Z y de T, en virtud de la primera y la última fórmulas. La segunda y la tercera de las fórmulas (10) demuestran que X e Y igualmente son divisibles por d_2.

Vemos, pues, que cada divisor de X, Y, Z, T es también divisor de a^2-ab+b^2 y de kc^3, y viceversa. Por consiguiente el máximo común divisor de X, Y, Z, T coincide con el máximo común divisor de a^2-ab+b^2 y de kc^3.

Pasemos al estudio del caso en que $a+b+kc$ sea divisible por 3, suponiendo, primero, que kc^3 no es divisible por 3.

En esta hipótesis los números X, Y, Z, T son divisibles por 3 y las relaciones (10) pueden representarse bajo la forma

$$\left\{\begin{array}{l} 3\,.\,\dfrac{Z}{3}=(a+b)\,(a^2-ab+b)+kc^3 \\ \dfrac{Z}{3}-\dfrac{X}{3}=a.(a^2-ab+b^2) \\ \dfrac{Z}{3}-\dfrac{Y}{3}=b\,(a^2-ab+b^2) \\ \dfrac{T}{3}=c\,(a^2-ab+b^2) \end{array}\right. \qquad (11)$$

en donde $\frac{X}{3}$, $\frac{Y}{3}$, $\frac{Z}{3}$, $\frac{T}{3}$ son enteros.

Las tres últimas de las relaciones (11) nos indican que cualquier divisor d_1 de $\frac{X}{3}$, $\frac{Y}{3}$, $\frac{Z}{3}$, $\frac{T}{3}$ es también divisor de a^2-ab+b^2, ya que a, b, c no tienen factores comunes. La primera de las relaciones (11) demuestra la divisibilidad de kc^3 por el mismo número d_1.

Como el producto kc^3 por hipótesis no es divisible por 3, no lo es también el divisor d_1.

Por el contrario, un divisor d_2 de a^2-ab+b^2 y de kc^3 que, como recién hemos visto, no es divisible por 3, divide el número $\frac{Z}{3}$, en virtud de la primera de las relaciones (11). La segunda y la tercera de las relaciones (11) demuestran la divisibilidad de $\frac{X}{3}$ y de $\frac{Y}{3}$ por d_2 y la última, la divisibilidad de $\frac{T}{3}$ por el mismo número.

De lo expuesto se desprende que el máximo común divisor de los números $\frac{X}{3}$, $\frac{Y}{3}$, $\frac{Z}{3}$, $\frac{T}{3}$ es idéntico al máximo común divisor de la forma a^2-ab+b^2 y del producto kc^3.

Consideremos, por último, el caso en que la suma $a+b+kc$ y el producto kc^3 son divisibles por 3 simultáneamente.

Es fácil ver que en esta ocasión kc y $a+b$ son también divisibles por 3 y la primera de las igualdades (11) puede rerepresentarse bajo la forma

$$\frac{Z}{3}=\frac{a+b}{3}\cdot(a^2-ab+b^2)+\frac{kc^3}{3}, \tag{12}$$

siendo $\frac{Z}{3}$, $\frac{a+b}{3}$, $\frac{kc^3}{3}$ números enteros.

La igualdad (12) y las tres últimas de las igualdades (11) permiten comprobar, como antes, que cada divisor de $\frac{X}{3}$, $\frac{Y}{3}$, $\frac{Z}{3}$, $\frac{T}{3}$, que en el presente caso puede ser divisible por 3, es también divisor de a^2-ab+b^2 y de $\frac{kc^3}{3}$ y viceversa.

Por lo tanto el máximo común divisor de $\frac{X}{3}, \frac{Y}{3}, \frac{Z}{3}, \frac{T}{3}$ será igual al máximo común divisor de $a^2 - ab + b^2$ y de $\frac{kc^3}{3}$.

Ahora se puede resumir los resultados obtenidos en la siguiente forma:

Todas las soluciones enteras de la ecuación indeterminada

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\,xyz = kt^3 \tag{13}$$

se expresan por las fórmulas

$$x = \frac{h}{d}\left[(b-a)^3 - a^3 + kc^3\right]$$

$$y = \frac{h}{d}\left[(a-b)^3 - b^3 + kc^3\right]$$

$$z = \frac{h}{d}\left(a^3 + b^3 + kc^3\right)$$

$$t = 3 \cdot \frac{h}{d} \cdot c\,(a^2 - ab + b^2)$$

en las cuales $a + b + kc$ no es divisible por 3, y por las fórmulas

$$x = \frac{h}{3d}\left[(b-a)^3 - a^3 + kc^3\right]$$

$$y = \frac{h}{3d}\left[(a-b)^3 - b^3 + kc^3\right]$$

$$z = \frac{h}{3d}\left(a^3 + b^3 + kc^3\right)$$

$$t = \frac{h}{d} \cdot c\,(a^2 - ab + b^2)$$

en donde $a + b + kc$ es divisible por 3.

En ambos grupos de fórmulas; a, b, c son números enteros arbitrarios sin divisor común.

Por la letra d está designado el máximo común divisor de la forma $a^2 - ab + b^2$ y del producto kc^3, exceptuando el caso en que la suma $a+b$ y el producto kc son divisibles por 3 simultáneamente. En este último caso d significa el máximo común divisor de a^2-ab+b^2 y de $\frac{kc^3}{3}$.

La letra h es igual a un número entero arbitrario. Si se desea obtener soluciones sin divisor común, basta hacer $h=1$.

En conclusión hagamos constar que el primer miembro de la ecuación (13) puede ser representado en forma de un circulante

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ z, & x, & y \\ y, & z, & x \end{vmatrix}$$

o de una norma

$$\begin{aligned}(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2 z)(x+\omega^2 y+\omega z)= \\ =(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy),\end{aligned}$$

siendo

$$\omega=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}) \quad \text{y} \quad \omega^2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$$

raíces primitivas de la unidad de 3er. grado.

Ambas formas conducen a otros métodos de resolución de la naturaleza netamente aritmética. La demostración geométrica que hemos expuesto nos parece más clara y sencilla.

Sergio Sispánov

Asunción, Paraguay.
9 de Marzo de 1943.