EJEMPLOS DE DESARROLLOS REALES MEDIANTE SERIES DE VARIABLE COMPLEJA

por SERGIO SISPÁNOV

Los desarrollos para la función indicada en el tema 40 y para la otra similar, con el logaritmo natural, son de la forma

$$\operatorname{arctng} \frac{x \operatorname{sen} \alpha}{1+x \cos \alpha}=\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \operatorname{sen} k \alpha,$$

$$\frac{1}{2} \ln \left(1+2 x \cos \alpha+x^2\right)=\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \cos k \alpha.$$

Ambas series tienen el radio de convergencia igual a 1 (*).

Un procedimiento de carácter muy amplio, perteneciente a *Euler*, en rasgos generales consiste en lo siguiente:

En el desarrollo,

$$f(z)=\sum_{k=0}^{k=\infty} c_k z^k \tag{1}$$

se hace:

$$c_k=a_k+b_k i, \qquad z=x(\cos \alpha+i \operatorname{sen} \alpha); \qquad |x|<r,$$

siendo r radio de convergencia.

En ambos miembros de la igualdad (1) se separan las partes reales de las imaginarias, lo que nos da $f[x(\cos \alpha+i \operatorname{sen} \alpha)]= =u+v i$ y

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} c_k z^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{k=\infty}\left(a_k \cos k \alpha-b_k \operatorname{sen} k \alpha\right) x^k+i \sum_{k=0}^{k=\infty}\left(a_k \operatorname{sen} k \alpha+b_k \cos k \alpha\right) x^k.$$

(*) Una sencilla demostración que tiene por base las fórmulas

$$\lim_{\mu=0} \frac{\operatorname{sen} \mu \theta}{\mu}=\theta, \quad \lim_{\mu=0} \frac{\rho^\mu-1}{\mu}=\ln \rho,$$

se halla en el texto "Enzyklopädie der Elementarmathematik" por Weber-Wellstein, 1er. tomo.

La comparación de los resultados conduce a las series para las funciones u y v

$$u\,(x\cos\alpha,\ x\,\mathrm{sen}\,\alpha)=\sum_{k=0}^{k=\infty}(a_k\cos k\,\alpha-b_k\,\mathrm{sen}\,k\,\alpha),$$

$$v\,(x\cos\alpha,\ x\,\mathrm{sen}\,\alpha)=\sum_{k=0}^{k=\infty}(a_k\,\mathrm{sen}\,k\,\alpha+b_k\cos k\,\alpha).$$

De estas series pueden deducirse otras por integración.

A veces conviene integrar previamente la relación (1), lo que nos da

$$\int f(z)\,dz=C+\sum_{k=\infty}^{k=0}\frac{c_k}{k+1}\,z^{k+1},$$

en donde $C=C_1+C_2\,i$ es constante de integración.

Efectuando, luego, las mismas sustituciones que antes y poniendo

$$\int f(z)\,dz=U+V\,i,$$

se llega a los siguientes desarrollos .

$$U=C_1+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\,(a_{k-1}\cos k\,\alpha-b_{k-1}\,\mathrm{sen}\,k\,\alpha)\,x^k,$$

$$V=C_2+\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k}\,(a_{k-1}\,\mathrm{sen}\,k\,\alpha+b_{k-1}\cos k\,\alpha)\,x^k,$$

en los que, a fin de abreviar las fórmulas, k está cambiado en $k-1$.

Son numerosísimas las aplicaciones de este clásico método de *Euler* y de sus diferentes variaciones.

Consideremos algunos ejemplos más sencillos.

Dividiendo 1 por $1+z$ vamos a tener

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\ldots \qquad (2)$$

Haciendo aquí

$$z = x(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha), \tag{3}$$

efectuando las operaciones indicadas, y comparando entre sí las partes reales y las imaginarias de ambos miembros, se obtienen series para las siguientes funciones

$$\frac{1+x\cos\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2} = 1 - x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha - x^3\cos 3\alpha + \dots$$

$$\frac{x\operatorname{sen}\alpha}{1+2x\cos\alpha+x^2} = x\operatorname{sen}\alpha - x^2\operatorname{sen}2\alpha + x^3\operatorname{sen}3\alpha - x^4\operatorname{sen}4\overline{\alpha} + \dots,$$

cuyos radios de convergencia son iguales a 1.

Si la relación (2) se integra previamente entre los límites $0, z$ y en el resultado

$$ln(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

la variable z se reemplaza por la misma expresión (3), con auxilio de la fórmula

$$\ln[1 + x(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+2x\cos\alpha+x^2) + i \operatorname{arctng}\frac{x\operatorname{sen}\alpha}{1+x\cos\alpha},$$

se llega a los desarrollos

$$\frac{1}{2}\ln(1+2x\cos\alpha+x^2) = x\cos\alpha - \frac{x^2}{2}\cos 2\alpha +$$

$$+ \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha - \frac{x^4}{4}\cos 4\alpha + \dots$$

$$\operatorname{arctng}\frac{x\operatorname{sen}\alpha}{1+x\cos\alpha} = x\operatorname{sen}\alpha - \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}2\alpha + \frac{x^3}{3}\operatorname{sen}3\alpha - \frac{x^4}{4}\operatorname{sen}4\alpha + \dots$$

El segundo de ellos es el que figura en el enunciado del problema.

Tomemos otro ejemplo. Partiendo de la serie

$$\frac{e^z-1}{z}=\frac{1}{1!}+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\dots$$

què converge para todos los valores finitos de z y aplicando la sustitución (3), encontramos las series

$$\frac{1}{x}\left[e^{x\cos\alpha}\cos(x\operatorname{sen}\alpha-\alpha)-\cos\alpha\right]=$$

$$=\frac{1}{1!}+\frac{x}{2!}\cos\alpha+\frac{x^2}{3!}\cos 2\alpha+\frac{x^3}{4!}\cos 3\alpha+\dots$$

$$\frac{1}{x}\left[e^{x\cos\alpha}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha-\alpha)+\operatorname{sen}\alpha\right]=$$

$$=\frac{x}{2!}\operatorname{sen}\alpha+\frac{x^2}{3!}\operatorname{sen}2\alpha+\frac{x^3}{4!}\operatorname{sen}3\alpha+\frac{x^4}{5!}\operatorname{sen}4\alpha+\dots$$

con radios de convergencia iguales a ∞.

Integrando las relaciones obtenidas resultan

$$\int_0^x\left[e^{x\cos\alpha}\cos(x\operatorname{sen}\alpha-\alpha)-\cos\alpha\right]\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!2}\cos\alpha+\frac{x^3}{3!3}\cos 2\alpha+\frac{x^4}{4!4}\cos 3\alpha+\dots$$

$$\int_0^x\left[e^{x\cos\alpha}\operatorname{sen}(x\operatorname{sen}\alpha-\alpha)+\operatorname{sen}\alpha\right]\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{x^2}{2!2}\operatorname{sen}\alpha+\frac{x^3}{3!3}\operatorname{sen}2\alpha+\frac{x^4}{4!4}\operatorname{sen}3\alpha+\frac{x^5}{5!5}\operatorname{sen}4\alpha+\dots$$

Si en estas series de carácter general hacemos primero $\alpha=0$, y luego $\alpha=\frac{\pi}{2}$ llegamos a las conocidas integrales

$$\int_0^x\frac{e^x-1}{x}\,dx,\quad\int_0^x\frac{\operatorname{sen}x}{x}\,dx,\quad\int_0^x\frac{1-\cos x}{x}\,dx.$$

A la primera de estas integrales se reduce el cálculo de la integral logarítmica de *Tshebysheff*. Las demás dos figuran en varios problemas de Análisis. Ninguna de ellas se expresa en funciones elementales trascendentes.

He aquí un ejemplo más. Si en el desarrollo

$$e^{-z^2} = 1 - \frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} - \frac{z^6}{3!} + \dots$$

se pone

$$z = x\left(\cos\frac{\alpha}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right),$$

se llega a las series para las funciones

$$e^{-x^2 \cos\alpha} \cos(x^2 \operatorname{sen}\alpha) = 1 - \frac{x^2}{1!}\cos\alpha + \frac{x^4}{2!}\cos 2\alpha - \frac{x^6}{3!}\cos 3\alpha + \dots$$

$$e^{-x^2 \cos\alpha} \operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen}\alpha) =$$

$$= \frac{x^2}{1!}\operatorname{sen}\alpha - \frac{x^4}{2!}\operatorname{sen} 2\alpha + \frac{x^6}{3!}\operatorname{sen} 3\alpha - \frac{x^8}{4!}\operatorname{sen} 4\alpha + \dots$$

Integrando resultan

$$\int_0^x e^{-x^2\cos\alpha}\cos(x^2\operatorname{sen}\alpha)\,dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{1!3}\cos\alpha + \frac{x^5}{2!5}\cos 2\alpha - \frac{x^7}{3!7}\cos 3\alpha + \dots$$

$$\int_0^x e^{-x^2\cos\alpha}\operatorname{sen}(x^2\operatorname{sen}\alpha)\,dx =$$

$$= \frac{x^3}{1!3}\operatorname{sen}\alpha - \frac{x^5}{2!5}\operatorname{sen} 2\alpha + \frac{x^7}{3!7}\operatorname{sen} 3\alpha - \frac{x^9}{4!9}\operatorname{sen} 4\alpha + \dots$$

Igualando α primero a 0, y luego a $\frac{\pi}{2}$ en estas fórmulas generales, se obtiene la conocida integral de *Laplace*, de suma importancia para la teoría de probabilidades y las dos de *Fresnel*, que desempeñan gran papel en la teoría de la difracción:

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx, \quad \int_0^x \cos x^2\,dx, \quad \int_0^x \operatorname{sen} x^2\,dx.$$

Finalmente hagamos constar que otros interesantes desarrollos se puede obtener valiéndose de la fórmula de *Gauss*

$$p \,.\int_0^z z^{p-1}(1-z)^q\,dz = z^p\;F(-q, p, p+1; z),$$

en donde F representa la serie hipergeométrica.

Asunción, Paraguay
5 de Enero de 1943.

Sergio Sispánov

CUESTIONES ELEMENTALES

21. En la prestigiosa revista Mathematical Monthly se calcula

$$\lim_{x \to \infty} \left[x.\ \operatorname{sen}\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right]^x$$

diciendo que por ser x sen $\frac{1}{x}$ equivalente a 1 el límite es e. Dar ejemplos en que tal razonamiento conduce a error y calcular correctamente el límite propuesto.

22. — Demostrar que el área del menisco cóncavo-convexo limitado por dos circunferencias C y C' de radio r y cuyos centros O y O' distan una longitud d, es igual al área de la porción de círculo C comprendida entre dos rectas perpendiculares a la línea de centros O, O' y equidistantes del centro una longitud $\frac{d}{2}$. Deducir que el área del menisco es aproximadamente

$$2d\sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$$

acotando el error.

23. — Si en un ángulo triedro se inscribe una sucesión de esferas tal que cada una toque a la precedente, ¿qué relación existe entre los radios de dos esferas consecutivas?

24. — Demostrar que las normales en cuatro puntos concíclicos de una parábola son tangentes a una parábola cuyo eje es paralelo al de la primera.