CALCULO ALGEBRAICO DEL ENDECAGONO REGULAR

por Sergio Sispánov

El lado a_{11} de un polígono regular de 11 lados inscripto en una circunferencia unitaria, propuesto como tema de estudio (*), se determina por las fórmulas trigonométricas

$$a_{11} = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{11} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{11}}.$$

Para pasar a la expresión algebraica del misma, se introducen la compleja

$$x = \cos \frac{2\pi}{11} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{11}$$

y su conjugada

$$\frac{1}{x} = \cos \frac{2\pi}{11} - i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{11},$$

cuya suma y es igual, evidentemente, a $2 \cos \frac{2\pi}{11}$, esto es,

$$y = x + \frac{1}{x} = 2 \cos \frac{2\pi}{11}.$$

La expresión anterior para a_{11} toma la forma

$$a_{11} = \sqrt{2 - y}. \tag{1}$$

La compleja x es raíz de la ecuación de la división del círculo

$$X_{11} = x^{10} + x^9 + \ldots + x + 1 = 0$$

(*) Tema 43, vol. IX núm. 1, pág. 38.

que después de ser dividida por x^5 se convierte en

$$\left(x^5+\frac{1}{x^5}\right)+\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\ldots+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0.$$

Teniendo en cuenta las relaciones

$$x+\frac{1}{x}=y, \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2, \quad x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3\,y,$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4\,y^2+2. \quad x^5+\frac{1}{x^5}=y^5-5\,y^3+5\,y,$$

que todas se deducen fácilmente de la primera, podemos representar la ecuación obtenida bajo la forma

$$y^5+y^4-4\,y^3-3\,y^2+3\,y+1=0 \qquad (2)$$

lo que es una ecuación cíclica irreducible en y.

Para su resolución es necesario adjuntar al dominio de racionalidad dos radicales cuadrados, los mismos que figuran en la expresión para la raíz primitiva de la unidad de 5º grado, y un radical de índice 5.

Todas las raíces

$$y_k=x^k+x^{-k}=2\cos k\,\frac{2\pi}{11} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

de la ecuación (2) son reales y por consiguiente, conforme al teorema de *Kronecker,* el último radical adjuntado debe tener ineludiblemente un valor complejo.

Se sabe que para la ecuación general de la división del círculo

$$X_p=x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1=0,$$

siendo $p=2n+1$ número primo, la cantidad

$$y=x+x^{-1},$$

que no es sino un período 2-membre de *Gauss,* se determina por la fórmula

$$n\,y = -1 + \sum_{j=1}^{j=n-1} \sqrt[n]{w(\varepsilon^j)}$$

en la que

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}$$

es raíz primitiva de la unidad de n-simo grado y

$$w(\varepsilon) = p\,.\prod_{h=1}^{h=n-2} \psi_h(\varepsilon). \tag{3}$$

Las funciones $\psi_h(\varepsilon)$ se encuentran mediante las relaciones de *Cauchy y Jacobi,* y tienen la siguiente forma

$$\psi_h(\varepsilon) = \sum_{\mu=1}^{\mu=p-2} \varepsilon^{ind.\,\mu - (h+1)\,ind.\,(\mu+1)}. \tag{4}$$

En el presente caso

$$p = 11 \quad \text{y} \quad n = 5,$$

y las fórmulas generales nos dan

$$5\,y = -1 + \sqrt[5]{w(\varepsilon)} + \sqrt[5]{w(\varepsilon^2)} + \sqrt[5]{w(\varepsilon^3)} + \sqrt[5]{w(\varepsilon^4)}. \tag{5}$$

La raíz primitiva de la unidad de 5º grado y sus potencias sucesivas se determinan por las relaciones:

$$\left\{\begin{aligned}
\varepsilon &= \cos 72^o + i\,\mathrm{sen}\,72^o = \frac{1}{4}\,(-1 + \sqrt{5} + i\,\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})\\
\varepsilon^2 &= \cos 144^o + i\,\mathrm{sen}\,144^o = \frac{1}{4}\,(-1 - \sqrt{5} + i\,\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})\\
\varepsilon^3 &= \cos 216^o + i\,\mathrm{sen}\,216^o = \frac{1}{4}\,(-1 - \sqrt{5} - i\,\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})\\
\varepsilon^4 &= \cos 288^o + i\,\mathrm{sen}\,288^o = \frac{1}{4}\,(-1 + \sqrt{5} - i\,\sqrt{10 + 2\sqrt{5}})
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

o lo que es lo mismo

$$\left\{\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\,.\,(1+i\sqrt{5+2\sqrt{5}})\\
\varepsilon^2 &= -\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\,.\,(1-i\sqrt{5-2\sqrt{5}})\\
\varepsilon^3 &= -\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})\,.\,(1+i\sqrt{5-2\sqrt{5}})\\
\varepsilon^4 &= \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})\,.\,(1-i\sqrt{5+2\sqrt{5}}).
\end{aligned}\right.$$

La raíz primitiva ε verifica a las siguientes igualdades

$$\varepsilon^5 = 1 \quad \text{y} \quad \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = -1 \qquad (7)$$

a que vamos a recurrir con frecuencia en adelante.

Teniendo en cuenta que el producto (3), que se compone de 3 factores, el 2º factor se deduce del 1º elevando al cuadrado su argumento y que los factores equidistantes del origen y del extremo son iguales, es decir, que

$$\psi_2(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon^2) \quad \text{y} \quad \psi_3(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon),$$

podemos escribir

$$w(\varepsilon) = 11\,\psi_1{}^2(\varepsilon)\,.\,\psi_1(\varepsilon^2).$$

Cambiando sucesivamente ε en ε^2, ε^3, ε^4, y disminuyendo las potencias de ε mayores que 5 con auxilio de la primera de las igualdades (7), deducimos de la última relación las siguientes:

$$w(\varepsilon^2) = 11\,\psi_1{}^2(\varepsilon^2)\,.\,\psi_1(\varepsilon^4), \qquad w(\varepsilon^3) = 11\,\psi_1{}^2(\varepsilon^3)\,.\,\psi_1(\varepsilon),$$
$$w(\varepsilon^4) = 11\,\psi_1{}^2(\varepsilon^4)\,.\,\psi_1(\varepsilon^3).$$

Si para abreviar la escritura pondremos

$$\psi_1(\varepsilon) = \psi_1, \ \psi_1(\varepsilon^2) = \psi_2, \ \psi_1(\varepsilon^3) = \psi_3, \ \psi_1(\varepsilon^4) = \psi_4$$

y

$$w(\varepsilon) = w_1, \quad w(\varepsilon^2) = w_2, \quad w(\varepsilon^3) = w_3, \quad w(\varepsilon^4) = w_4,$$

resultan

$$\begin{aligned} w_1 &= 11\,\psi_1^2\,\psi_2, \quad & w_2 &= 11\,\psi_2^2\,\psi_4, \\ w_3 &= 11\,\psi_3^2\,\psi_1, \quad & w_4 &= 11\,\psi_4^2\,\psi_3. \end{aligned} \tag{8}$$

Necesitamos únicamente la 1ª de las fórmulas (4) que toma la forma

$$\psi_1 = \sum_{\mu=1}^{\mu=9} \varepsilon^{ind\,\mu\,-2ind(\mu+1)}. \tag{9}$$

Las funciones ψ_2, ψ_3, ψ_4 se obtendrán de la función ψ_1 sustituyendo ε por sus potencias sucesivas ε^2, ε^3, ε^4.

Para hallar ψ_1 adoptemos $g=2$ por raíz primitiva del número primo $p=11$ y formemos la serie de congruencias por módulo 11

$$\begin{aligned} &2^0 \equiv 1, \quad 2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 8, \quad 2^4 \equiv 5, \\ &2^5 \equiv 10, \, 2^6 \equiv 9, \quad 2^7 \equiv 7, \quad 2^8 \equiv 3, \quad 2^9 \equiv 6. \end{aligned}$$

De conformidad con la relación (9) se construye la siguiente tabla

μ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ind μ	0	1	8	2	4	9	7	3	6	5
ind μ (mod 5)	0	1	3	2	4	4	2	3	1	0
ind $(\mu+1)$	1	3	2	4	4	2	3	1	0	
2 ind $(\mu+1)$	2	1	4	3	3	4	1	2	0	
ind $\mu - 2$ ind $(\mu+1)$	3	0	4	4	1	0	1	1	1	

La última fila de la misma nos da

$$\psi_1 = 2 + 4\,\varepsilon + \varepsilon^3 + 2\,\varepsilon^4 = 2\,\varepsilon - 2\,\varepsilon^2 - \varepsilon^3$$

lo que se comprueba fácilmente con auxilio de la 2ª de las igualdades (7).

Reemplazando ε por ε^2 y disminuyendo las potencias de ε mayores que 5, en virtud de la 1ª de las igualdades (7), encontramos

$$\psi_2 = -\varepsilon + 2\,\varepsilon^2 - 2\,\varepsilon^4.$$

Siguiendo este procedimiento podríamos hallar también

$$\psi_3 = -2\,\varepsilon + 2\,\varepsilon^3 - \varepsilon^4$$

y

$$\psi_4 = -\varepsilon^2 - 2\,\varepsilon^3 + 2\,\varepsilon^4.$$

Multiplicando ψ_2 por ψ_1, y el resultado otra vez por ψ_1, con ayuda de las relaciones (7), vamos a tener

$$\psi_1\,\psi_2 = 10\,\varepsilon + 6\,\varepsilon^2 + 12\,\varepsilon^3 + 3\,\varepsilon^4$$

y

$$\psi_1^2\,\psi_2 = 6\,\varepsilon + 41\,\varepsilon^2 + 16\,\varepsilon^3 + 26\,\varepsilon^4.$$

Si esta expresión se introduce en la 1ª de las fórmulas (8), se obtiene

$$w_1 = 11\,(6\,\varepsilon + 41\,\varepsilon^2 + 16\,\varepsilon^3 + 26\,\varepsilon^4). \qquad (10)$$

Cambiando aquí sucesivamente ε en ε^2, ε^3 y ε^4 se llega a las expresiones para w_2, w_3 y w_4.

Haciendo uso de las igualdades (7) no es difícil deducir varias relaciones auxiliares, útiles para los cálculos posteriores.

Si se multiplican, por ejemplo, ψ_1 por ψ_4 y ψ_2 por ψ_3, resulta

$$\psi_1\,\psi_4 = \psi_2\,\psi_3 = 11. \qquad (11)$$

Como la compleja ψ_4 es conjugada a la compleja ψ_1 y la ψ_3 a la ψ_2, entonces para su módulo tendremos

$$|\psi_j| = \sqrt{11}.$$

De una manera análoga, multiplicando ordenadamente la 1ª de las relaciones (8) por la 4ª, y la 2ª por la 3ª, vamos a tener para el módulo

$$|w_j| = (\sqrt{11})^5.$$

En ambos resultados el subíndice j pasa por la serie ae valores

$$1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Ahora se puede representar la expresión (5) bajo la forma

$$5\,y = -1 + \sqrt[5]{w_1} + \sqrt[5]{w_2} + \sqrt[5]{w_3} + \sqrt[5]{w_4}, \qquad (12)$$

siendo

$$\sqrt[5]{w_1} = \sqrt[5]{11\,\psi_1{}^2\,\psi_2}, \quad \sqrt[5]{w_2} = \sqrt[5]{11\,\psi_2{}^2\,\psi_4},$$

$$\sqrt[5]{w_3} = \sqrt[5]{11\,\psi_3{}^2\,\psi_1}, \quad \sqrt[5]{w_4} = \sqrt[5]{11\,\psi_4{}^2\,\psi_3}.$$

Los cuatro radicales que figuran en la fórmula (12) no son independientes. En efecto, teniendo en cuenta las relaciones (11) es muy fácil comprobar que

$$\sqrt[5]{w_1}\,.\,(\sqrt[5]{w_2})^2 = 11\,\psi_2, \qquad \sqrt[5]{w_2}\,.\,(\sqrt[5]{w_4})^2 = 11\,\psi_4,$$

$$\sqrt[5]{w_3}\,.\,(\sqrt[5]{w_1})^2 = 11\,\psi_1, \qquad \sqrt[5]{w_4}\,.\,(\sqrt[5]{w_3})^2 = 11\,\psi_3,$$

y además

$$\sqrt[5]{w_1}\,.\,\sqrt[5]{w_4} = \sqrt[5]{w_2}\,.\,\sqrt[5]{w_3} = 11.$$

Valiéndonos de estos resultados podemos atribuir a la expresión (12) la siguiente forma

$$5y = -1 + \sqrt[5]{w_1} + \frac{\psi_4}{11}(\sqrt[5]{w_1})^2 + \frac{11\psi_1}{(\sqrt[5]{w_1})^2} + \frac{11}{\sqrt[5]{w_1}}$$

o bien la forma *abeliana*

$$5y = -1 + \sqrt[5]{w_1} + \frac{\psi_4}{11}(\sqrt[5]{w_1})^2 + \frac{\psi_3\psi_4}{11^2}(\sqrt[5]{w_1})^3 + \frac{\psi_3\psi_4^2}{11^3}(\sqrt[5]{w_1})^4.$$

En ambas formas figura un solo radical de índice 5, cuyos distintos valores conducen a diferentes raíces de la ecuación (2). Las fórmulas generales serán

$$5y_l = -1 + \varepsilon^l.\sqrt[5]{w_1} + \varepsilon^{2l}.\sqrt[5]{w_2} + \varepsilon^{3l}.\sqrt[5]{w_3} + \varepsilon^{4l}.\sqrt[5]{w_4} =$$

$$= -1 + \varepsilon^l.\sqrt[5]{w_1} + \varepsilon^{2l}.\frac{\psi_4}{11}(\sqrt[5]{w_1})^2 + \varepsilon^{3l}.\frac{11\psi_1}{(\sqrt[5]{w_1})^2} + \varepsilon^{4l}.\frac{11}{\sqrt[5]{w_1}} =$$

$$= -1 + \varepsilon^l.\sqrt[5]{w_1} + \varepsilon^{2l}.\frac{\psi_4}{11}(\sqrt[5]{w_1})^2 +$$

$$+ \varepsilon^{3l}.\frac{\psi_3\psi_4}{11^2}(\sqrt[5]{w_1})^3 + \varepsilon^{4l}.\frac{\psi_3\psi_4^2}{11^3}(\sqrt[5]{w_1})^4,$$

$$(l = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

De ellas nos interesan exclusivamente la primera que determina la raíz $y = y_0$ en una forma más sencilla, simétrica y cómoda para los cálculos.

Despejando y y sustituyendo, luego, en la expresión (10) para w_1 y en las otras similares para w_2, w_3, w_4, las potencias ε, ε^2, ε^3, ε^4, por sus iguales (6) resulta

$$y = \frac{1}{5}(-1 + \sqrt[5]{w_1} + \sqrt[5]{w_2} + \sqrt[5]{w_3} + \sqrt[5]{w_4}). \tag{13}$$

en donde

$$\begin{cases} w_1 = \frac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} - 20\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}} + 25\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}) \\ w_2 = \frac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} - 20\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}} - 25\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}) \\ w_3 = \frac{11}{4}(-89 + 25\sqrt{5} + 20\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}} + 25\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}}) \\ w_4 = \frac{11}{4}(-89 - 25\sqrt{5} + 20\,i\sqrt{10+2\sqrt{5}} - 25\,i\sqrt{10-2\sqrt{5}}) \end{cases}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{cases} w_1 = \frac{11}{4}[-89 - 25\sqrt{5} - 5\,i\,(7-\sqrt{5})\sqrt{5-2\sqrt{5}}] \\ w_2 = \frac{11}{4}[-89 + 25\sqrt{5} - 5\,i\,(7+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}] \\ w_3 = \frac{11}{4}[-89 + 25\sqrt{5} + 5\,i\,(7+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}] \\ w_4 = \frac{11}{4}[-89 - 25\sqrt{5} + 5\,i\,(7-\sqrt{5})\sqrt{5-2\sqrt{5}}]. \end{cases} \qquad (14)$$

Entre los radicales cuadrados que figuran en las igualdades (14) existe la siguiente relación

$$\sqrt{5-2\sqrt{5}}\,.\,\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,.$$

Reemplazando en la expresión (1) la cantidad y por su igual (13) llegamos a la fórmula definitiva

$$a_{11} = \sqrt{\frac{1}{5}(11 - \sqrt[5]{w_1} - \sqrt[5]{w_2} - \sqrt[5]{w_3} - \sqrt[5]{w_4})}. \qquad (15)$$

Comprobemos numéricamente el resultado obtenido. A este objeto calculamos, primero, valores numéricos de

$$89 + 25\sqrt{5} = 144{,}901701; \quad 5\,(7-\sqrt{5}) = 23{,}819660;$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{5}} = 0{,}726543$$

$$89 - 25\sqrt{5} = 33{,}098299; \quad 5(7+\sqrt{5}) = 46{,}180340;$$

$$\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 3{,}077684.$$

Luego, por las relaciones (14) encontramos

$$w_1 = (\sqrt{11})^5 . (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha), \quad w_2 = (\sqrt{11})^5 . (\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta),$$

$$w_3 = (\sqrt{11})^5 . (\cos\beta - i \operatorname{sen}\beta), \quad w_4 = (\sqrt{11})^5 . (\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha),$$

siendo $\alpha = 186^\circ\, 48'\, 38''\, 6$ y $\beta = 256^\circ\, 53'\, 27''\, 0$.

Extrayendo raíces se obtienen

$$\sqrt[5]{w_1} = \sqrt{11} . \left(\cos\frac{\alpha}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\alpha}{5}\right),$$

$$\sqrt[5]{w_2} = \sqrt{11} . \left(\cos\frac{\beta}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\beta}{5}\right),$$

$$\sqrt[5]{w_3} = \sqrt{11} . \left(\cos\frac{\beta}{5} - i \operatorname{sen}\frac{\beta}{5}\right),$$

$$\sqrt[5]{w_4} = \sqrt{11} . \left(\cos\frac{\alpha}{5} - i \operatorname{sen}\frac{\alpha}{5}\right),$$

en donde

$$\frac{\alpha}{5} = 27^\circ\, 21'\, 43''\, 7 \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{5} = 51^\circ\, 22'\, 41''\, 4.$$

De manera que

$$\sqrt[5]{w_1} + \sqrt[5]{w_2} + \sqrt[5]{w_3} + \sqrt[5]{w_4} = 2\sqrt{11}\left(\cos\frac{\alpha}{5} + \cos\frac{\beta}{5}\right) =$$

$$= 2 . 3{,}316625 . 1{,}418993 = 9{,}412536.$$

Por la fórmula (13) hallamos

$$y = 1{,}682507\ldots$$

Para determinar a_{11} calculemos primero la expresión

$$\frac{1}{5}(11 - \sqrt[5]{w_1} - \sqrt[5]{w_2} - \sqrt[5]{w_3} - \sqrt[5]{w_4}) = 0{,}317493.$$

En virtud de la igualdad (15) vamos a tener

$$a_{11} = \sqrt{0{,}317493} = 0{,}563465\ldots$$

Los cálculos trigonométricos directos nos dan

$$y = 2\cos\frac{360^o}{11} = 2\cos 32^o\,43'\,38''\,2 =$$

$$= 2\,.\,0{,}8412535 = 1{,}682507\ldots$$

y

$$a_{11} = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{180^o}{11} = 2\,\mathrm{sen}\,16^o\,21'\,49''\,1 =$$

$$= 2\,.\,0{,}2817326 = 0{,}563465\ldots$$

Hagamos constar de paso que el valor

$$a_{11} = 0{,}5636\ldots$$

hallado por la fórmula aproximada

$$a_m = \frac{4}{m}\cdot\frac{11\,m^2-12}{7\,m^2+4},$$

haciendo en ella $m = 11$, no difiere mucho del resultado más exacto recién obtenido.

Las sumas

$$y_k = x^k + x^{-k}$$

fueron introducidas en la teoría de la división del círculo por el matemático francés *N. Vandermonde* en el año 1770. Para el polígono regular de 11 lados él encontró

$$y = -\frac{1}{5}\left(1 + \sqrt[5]{\Delta'} + \sqrt[5]{\Delta''} + \sqrt[5]{\Delta'''} + \sqrt[5]{\Delta''''}\right),$$

siendo

$$\begin{cases} \Delta' = \frac{11}{4}\left(89 + 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right) \\ \Delta'' = \frac{11}{4}\left(89 + 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right) \\ \Delta''' = \frac{11}{4}\left(89 - 25\sqrt{5} - 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} - 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right) \\ \Delta'''' = \frac{11}{4}\left(89 - 25\sqrt{5} + 5\sqrt{-5+2\sqrt{5}} + 45\sqrt{-5-2\sqrt{5}}\right). \end{cases}$$

Comparando estos resultados con las igualdades (13) y (14) vemos que las expresiones para Δ' y Δ'' son erróneas.

Tampoco son correctas las fórmulas para w e y obtenidas por el Prof. *Paul Bachmann* en su libro «Die Lehre von der Kreisteilung» (pág. 98).

Sergio Sispánov

Asunción, Paraguay.