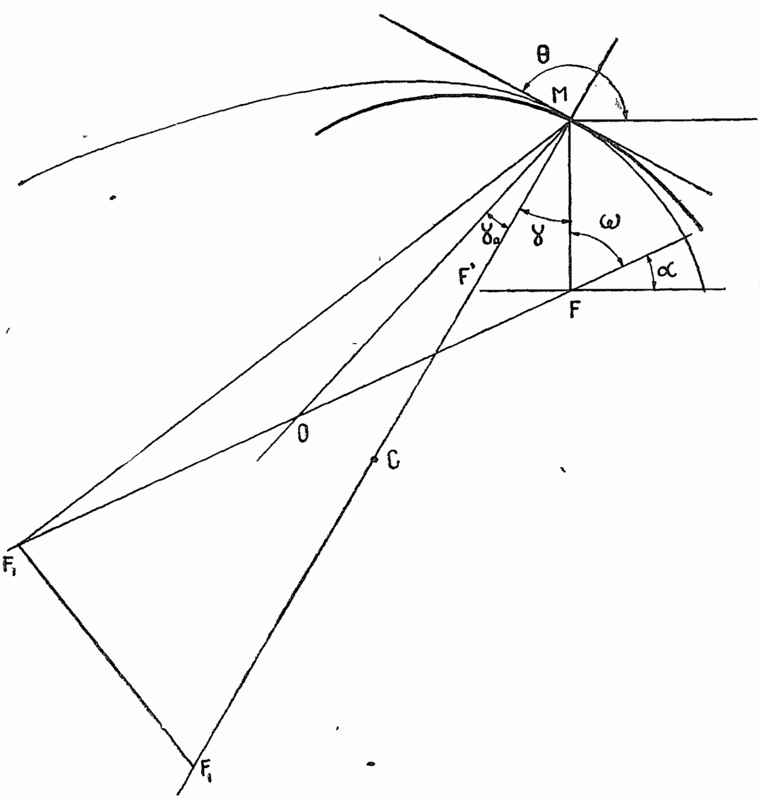
SOBRE LAS CONICAS DE MAXIMO CONTACTO

En el número anterior de esta Revista, *Luis A. Santaló* publicó una solución al Tema propuesto N°. 29, en el que se pedía la determinación de la excentricidad y del parámetro de la cónica osculatriz en un punto ordinario de una curva plana. A continuación exponemos otra solución de ese tema, que difiere de la anterior por la elección de los parámetros utilizados para resolver la cuestión, y a la que agregamos algunas propiedades de las cónicas de máximo contacto.



Sea $M(x, y)$ un punto ordinario de una curva plana, que consideraremos afijo del número $z=x+iy$. Si ζ es, a su vez, el número cuyo afijo es el foco F de la cónica de máximo contacto con la curva en M, será

$$z = \zeta + \frac{p\, e^{i(\omega+\alpha)}}{1-k\cos\omega} \tag{1}$$

siendo p y k el parámetro y la excentricidad, respectivamente, de la cónica y α y ω los ángulos que forman, respectivamente, el eje de la cónica con el eje de las abscisas, y la semirrecta FM con el eje de la cónica.

Si se diferencia la (1) (α, p, k, ζ constantes) para eliminar ζ

$$dz = \frac{p\, i\, e^{i(\omega+\alpha)}\,(1-k\cos\omega + i\, k \operatorname{sen}\omega)}{(1-k\cos\omega)^2}\, d\omega = e^{i\vartheta}\, ds$$

siendo ds el elemento de arco y ϑ el ángulo que forma la tangente a la curva en M con el eje de las abscisas.

De la última fórmula se deduce

$$(1-k\cos\omega)^2\, ds = p\,(1+k^2-2\,k\cos\omega)^{1/2}\, d\omega \tag{2}$$

y

$$\omega + \alpha + \pi - \left(\vartheta + \frac{\pi}{2}\right) = \gamma \tag{3}$$

siendo γ un ángulo tal que

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{-k\operatorname{sen}\omega} = \frac{\cos\gamma}{1-k\cos\omega} \tag{4}$$

es decir: el ángulo que forma la semirrecta MF con la normal a la curva en el punto M.

Si indicamos, desde ahora en adelante, con ápices las derivadas respecto del arco, tendremos de la (3) y (4)

$$\gamma' = \frac{k\,(k-\cos\omega)}{1+k^2-2\,k\cos\omega}\,\omega' = \omega' - \vartheta' \tag{5}$$

y eliminando ω' entre estas ecuaciones y la (2), obtenemos

$$\vartheta' = \frac{(1-k\cos\omega)^3}{p\,(1+k^2-2\,k\cos\omega)^{3/2}} = \frac{\cos^3\gamma}{p} = \frac{1}{\rho} \tag{6}$$

siendo ρ el radio de curvatura de la curva en M, y

$$\gamma' = \frac{k\,(k-\cos\omega)\,(1-k\cos\omega)^2}{p\,(1+k^2-2\,k\cos\omega)^{3/2}} = \frac{k\,(k-\cos\omega)}{\rho\,(1-k\cos\omega)}. \tag{7}$$

Introduzcamos ahora dos nuevos parámetros u y v dados por

$$u = \operatorname{tg}\gamma; \qquad v = \rho\,\gamma'$$

y como M estará siempre en un arco de cónica para el cual γ es creciente será $v \geqq 0$. De la (6) se deduce inmediatamente el valor del parámetro p

$$p = \frac{\rho}{(1+u^2)^{3/2}} \tag{8}$$

mientras que si se introducen u y v en la (4) y (7) se obtiene

$$1 - k\cos\omega = \frac{1-k^2}{1-v}; \qquad -k\,\mathrm{sen}\,\omega = u\,\frac{1-k^2}{1-v}$$

y eliminando ω

$$(1+k^2)\,(u^2+v^2-k^2\,(1+u^2)) = 0$$

$$k^2 = \frac{u^2+v^2}{u^2+1}. \tag{9}$$

Para determinar los valores de u y v partiendo de los elementos del punto M, consideremos, ante todo, que de la (6) y de sus definiciones

$$\rho' = 3\,p\,\operatorname{tg}\gamma\cos^{-3}\gamma\,.\,\gamma' = 3\,u\,v \tag{10}$$

mientras que si derivamos u y v obtenemos

$$\rho\,u' = \frac{v}{\cos^2\gamma} = v\,(1+u^2)$$

$$\rho\,v' = \rho\,\omega'\,\frac{(1-k^2)\,k\,\mathrm{sen}\,\omega}{(1-k\cos\omega)^2} = \frac{\rho\,(1-k^2)\,k\,\mathrm{sen}\,\omega}{p\,(1+k^2-2\,k\cos\omega)^{1/2}}$$

$$= -\,\frac{u\,(1-k^2)}{1+u^2} = -\,u\,(1-v^2)$$

de donde

$$\rho\rho'' = 3\,\rho\,(u\,v' + u'\,v) = 3\,(v^2 - u^2 + 2\,u^2\,v^2) = 3\,(v^2 - u^2) + \frac{2}{3}\rho'^2$$

y finalmente

$$2\,\rho'^2 - 3\,\rho\rho'' = 9\,(u^2 - v^2) \qquad (11)$$

Si expresamos, finalmente, los valores de ω, α y ζ en función de u y v llegamos después de algunas sustituciones y transformaciones a las fórmulas

$$e^{i\omega} = \frac{u^2 - v - i\,u\,(1+v)}{(u^2+v^2)^{1/2}\,(1+u^2)^{1/2}} \qquad (12)$$

$$e^{i(\alpha-\vartheta)} = \frac{u + i\,v}{(u^2+v^2)^{1/2}} \qquad (13)$$

$$\zeta = z + \frac{\rho\,i\,z'}{(1-u\,i)\,(1+v)} \qquad (14)$$

donde sustituimos $e^{i\vartheta}$ por z'.

Las expresiones 8 a 14 permiten resolver todos los problemas relacionados con los elementos y ubicación de la cónica de máximo contacto en un punto M de una curva plana.

Así: los valores de los semiejes (cuando existen) a y b y de la distancia focal c están dados por

$$a^2 = \frac{p^2}{(1-k^2)^2} = \frac{\rho^2}{(1+u^2)\,(1-v^2)^2}$$

$$b^2 = \frac{p^2}{1-k^2} = \frac{\rho^2}{(1+u^2)^2\,(1-v^2)}$$

$$c^2 = \frac{p^2k^2}{(1-k^2)^2} = \frac{\rho^2\,(u^2+v^2)}{(1+u^2)^2\,(1-v^2)^2}$$

y el segundo foco y el centro son afijos de

$$\zeta_1 = z + \frac{\rho\,i\,z'}{(1+u\,i)\,(1-v)} \qquad (15)$$

$$\zeta_0 = z + \frac{\rho\,i\,z'\,(1+i\,u)}{(1+u^2)\,(1-v^2)} \qquad (16)$$

respectivamente. La última fórmula nos da, además, una interpretación geométrica de ρ', pues de ella se deduce fácilmente que el ángulo γ_0 que forma la normal en M con la semirrecta que va de M al centro de la cónica es tal que

$$\operatorname{tg} \gamma_0 = u\, v = \frac{\rho'}{3}.$$

La fórmula (13) da una nueva interpretación geométrica de los parámetros u y v, como números proporcionales al coseno y seno, respectivamente, del ángulo formado por el eje de la cónica con la tangente en el punto. Podemos obtener otra interpretación de v considerando sobre la normal MC el centro de curvatura C y los puntos F' y F'_1 obtenidos levantando desde los focos F y F' las perpendiculares a los radios vectores.

De la (14) obtenemos

$$1 + v = \frac{|\zeta - z|}{\rho \cos \gamma} = \frac{\overline{MF'}}{\overline{MC}} = 1 - \frac{\overline{CF'}}{\overline{CM}} \quad \therefore \quad v = -(C\,M\,F')$$

y de igual modo

$$v = (C\,M\,F_1')$$

de donde, v es, con distinto o igual signo, la razón simple entre el centro de curvatura, el punto y el pie de la perpendicular levantada desde uno u otro de los focos, respectivamente. De aquí resulta la propiedad, ya conocida [1] de las cónicas: $(C\,M\,F_1\,F'_1) = -1$, es decir: el grupo formado por un punto de una cónica, el centro de curvatura y las intersecciones con la normal de las perpendiculares levantadas desde los focos a los radios vectores, es armónico. En la parábola, entonces, esa intersección es el punto medio entre el punto de la cónica y el centro de curvatura.

Entre los problemas que podrán resolverse con las fórmulas (8) a (14) podemos considerar:

---

(1) Es la llamada construcción de Engler para el centro de curvatura. Véase: L. MACK. *Archiv. Math. Phys.* I 61 (1877) 385.

a) *Determinar la cónica de máximo contacto en un punto.* Las fórmulas (10) y (11) con la condición $v \geqq 0$ permiten determinar siempre un solo par de valores u y v, con el cual se determinan todos los demás elementos de la cónica. Esa cónica será elipse, parábola o hipérbola, según sea $k \lesseqgtr 1$ o lo que es lo mismo $v \lesseqgtr 1$. Eliminando u entre (10) y (11) esta condición se cumple para

$$3\rho\rho'' \lesseqgtr \rho'^2 + 9.$$

Si la cónica tiene centro, su ecuación reducida será

$$\frac{x^2}{1+u^2} + \frac{y^2}{1-v^2} = \frac{\rho^2}{(1+u^2)^2\,(1-v^2)^2}$$

y si es parábola, ella es

$$y^2 = \frac{2\rho x}{(1+u^2)^{3/2}}.$$

Si el punto M de la curva es un vértice ($\rho' = 0$) será $uv = 0$ y $v^2 - u^2 = \frac{\rho\rho''}{3}$; de donde: si $\rho'' > 0$; $u = 0$, $v^2 = \frac{\rho\rho''}{3}$; la cónica será elipse, parábola o hipérbola, según sea $\rho\rho'' \lesseqgtr 3$ y el vértice pertenecerá al eje de la cónica que contiene a los focos, mientras que si $\rho'' < 0$; $v = 0$, $u^2 = -\frac{\rho\rho''}{3}$, la cónica es siempre elipse y el vértice pertenece al eje normal al anterior.

Por ejemplo en el vértice de la catenaria $y = a\,Ch\,\frac{x}{a}$ tendremos

$$\vartheta = 0; \quad \rho = a; \quad \rho' = 0; \quad \rho'' = \frac{2}{a}$$

de donde:

$$u = 0; \quad v^2 = \frac{2}{3}; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}\ ; \quad \zeta_0 = 4\,ai$$

y la cónica de máximo contacto es una elipse que, referida a los mismos ejes que la catenaria, tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{3a^2}+\frac{(y-4a)^2}{9a^2}=1$$

de donde podemos deducir la siguiente expresión aproximada para el coseno hiperbólico

$$Ch\, z = 4 - 3\sqrt{1-\frac{z^2}{3}}+\varepsilon$$

siendo

$$\varepsilon = -\frac{z^6}{144}-\frac{43\, z^8}{6\,.\,7!}-\ldots$$

que puede aplicarse al coseno circular cambiando z por zi

$$\cos z = 4 - 3\sqrt{1+\frac{z^2}{3}}+\varepsilon; \qquad \varepsilon = \frac{z^6}{144}-\frac{43\, z^8}{6\,.\,7!}+\ldots$$

b) *Determinar la cónica de máximo contacto perteneciente a una familia dada de cónicas.* Si se conoce uno cualquiera de los valores: p, k, a, b, c, ζ, ζ_1, ζ_0, que en cada caso caracterizan una familia determinada de cónicas, ese valor con la fórmula (10) permite determinar u y v. Por ejemplo, si se trata de la familia de parábolas ($k=1$) de donde $v=1$ y $3\,u=\rho'$

$$p=\frac{27\,\rho}{(9+\rho'^2)^{3/2}}; \qquad \zeta = z + \frac{3\,\rho\, i\, z'}{2\,(3-i\,\rho')}.$$

Si, en cambio, se trata de la familia de hipérbolas equiláteras ($k=\sqrt{2}$);

$$v^2 = 1+\frac{1}{3}\sqrt{9+\rho'^2}; \qquad u^2=\frac{1}{3}\sqrt{9+\rho'^2}-1; \qquad p=\frac{3\sqrt{3}\,\rho}{(9+\rho'^2)^{3/4}}$$

$$\zeta_0 = z + \frac{3\,\rho\, z'}{\rho'+3\,i}.$$

En los casos anteriores el contacto máximo es de tercer orden, pero si se fijan dos de los 8 valores anteriores, entonces ese contacto será de segundo orden; por ejemplo: sea determinar el parámetro de la parábola ($k=1$) de máximo contacto en un punto z y cuyo foco esté en el origen ($\zeta=0$) las fórmulas (8), (9) y (14) darían fácilmente $p=\frac{8|z|^3}{\rho^2}$.

El caso de la circunferencia ($k=0$) trae consigo $u=v=0$ lo que exige $p=\rho$ y $a=b=\rho$; $\zeta=z+\rho\, iz'$.

c) *Determinar las condiciones para que una cónica tenga un contacto de orden superior al ordinario.* En el caso general habrá que eliminar p, k, u y v entre (8), (9), (10), (11) y una quinta ecuación obtenida por derivación. Recordando que $\rho\, u'=v\,(1+u^2)$; $\rho\, v'=-u\,(1-v^2)$ obtenemos, derivando la (11)

$$\rho'\rho''-3\,\rho\rho'''=18\,(uu'-vv')=\frac{18\,u\,v}{\rho}\,(2+u^2-v^2)$$

y eliminando u y v entre ésta y la (10) y (11)

$$4\,\rho'\,(\rho'^2+9)=9\,\rho\,(\rho'\rho''-\rho\rho''') \qquad (17)$$

que es la condición para que una cónica tenga un contacto por lo menos de quinto orden. Además esta ecuación es la ecuación diferencial de todas las cónicas del plano.

Como casos particulares tendríamos: La condición para que la parábola de máximo contacto (tercer orden) tenga un contacto por lo menos del cuarto orden es

$$3\,\rho\rho''=\rho'^2+9.$$

La condición para que la hipérbola equilátera de máximo contacto (tercer orden) tenga un contacto por lo menos del cuarto orden es

$$3\,\rho\rho''=2\,(\rho'^2+9)$$

y, por último, llegamos en el caso de la circunferencia a la conocida condición $\rho'=0$ para que la circunferencia de máximo contacto (segundo orden) tenga un contacto por lo menos de tercer orden.

Por ejemplo en la catenaria para la cual $\rho'^2 + 9 - 3\rho\rho'' = 3 - 2\frac{s^2}{a^2}$ se tendrá que la cónica de máximo contacto es una elipse, parábola o hipérbola, según sea $s^2 \lesseqgtr \frac{3}{2} a^2$ y por lo tanto en los puntos para los que $s^2 = \frac{3}{2} a^2$ la parábola de máximo contacto tiene un orden superior al ordinario.

Consideremos ahora la variación respecto de s, de p, k, α y ζ. De (13) obtenemos $\alpha' - \vartheta' = \frac{uv' - u'v}{u^2 + v^2}$ ∴ $(\rho\alpha' - 1)(u^2 + v^2) = \rho(uv' - u'v)$ y sustituyendo en (11) los valores de ρ' y ρ'' deducidos de (10)

$$\rho' = 3uv; \qquad \rho'' = 3(uv' + u'v); \qquad 2u^2v^2 = u^2 - v^2 + \rho(uv' + u'v)$$

de donde

$$\rho u' = -\frac{\rho\alpha'}{2v}(u^2 + v^2) + v(1 + u^2)$$

$$\rho v' = \frac{\rho\alpha'}{2u}(u^2 + v^2) - u(1 - v^2)$$

Derivando las (8), (9) y (14) y eliminando u' y v' se obtiene

$$p' = \frac{3\rho\alpha' u(u^2+v^2)}{2v(1+u^2)^{5/2}}$$

$$k' = \frac{\alpha'(u^2+v^2)[u^2(u^2+v^2)+(1+u^2)(v^2-u^2)]}{2uv(1+u^2)^2}$$

$$\zeta' = \frac{\rho\alpha' z'(u^2+v^2)(u-iv)}{2uv(1-iu)^2(1+v)^2} = \sigma' e^{i\vartheta_1},$$

siendo σ el arco de la curva, lugar del foco de la cónica de máximo contacto, y ϑ_1 el ángulo que forma la tangente a esta curva con el eje de las abscisas.

Será entonces

$$\sigma' = \left| \frac{\rho\, \alpha' (u^2+v^2)^{3/2}}{2\, u\, v\, (1+u^2)\, (1+v)^2} \right|$$

$$\vartheta_1 = 2(\vartheta + \gamma) - \alpha \qquad \text{o} \qquad \vartheta_1 = 2(\vartheta + \gamma) - \alpha + \pi$$

y teniendo en cuenta la (3)

$$\vartheta_1 = 2\,(\omega + \alpha + \pi) - \alpha - \pi \qquad \text{o} \qquad \vartheta_1 = = 2\,(\omega + \alpha + \pi) - \alpha$$

es decir que la tangente a la curva, lugar del foco, es bisectriz interior o exterior del ángulo formado por la semirrecta MF con la dirección del eje de la cónica.

Observamos además que si $\alpha' = 0$, se anulan también p', k', ζ' y por tanto σ', lo que significa que esos puntos de la curva, lugar del foco, son singulares. Es fácil demostrar que para esos puntos la cónica tiene con la curva un contacto de orden superior al ordinario. En efecto de (10), (11) y (13) se deduce

$$\rho' = 3\, uv = \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2\,(\alpha - \vartheta)\,.\,(u^2 + v^2)$$

$$2\,\rho'^2 - 3\,\rho\rho'' = 9\,(u^2 + v^2) \cos 2\,(\alpha - \vartheta)$$

de donde

$$\operatorname{tg} 2\,(\alpha - \vartheta) = \frac{6\,\rho'}{2\,\rho'^2 - 3\,\rho\rho''}$$

y derivando

$$2\,(\alpha' - \vartheta') = 2\left(\alpha' - \frac{1}{\rho}\right) = 6\,\frac{\rho''\,(2\,\rho'^2 - 3\,\rho\,\rho'') - \rho'\,(\rho'\,\rho'' - 3\,\rho\rho''')}{36\,\rho'^2 + (2\,\rho'^2 - 3\,\rho\rho'')^2}$$

se obtiene

$$\rho\alpha' = \rho' \cdot \frac{4\,\rho'(\rho'^2 + 9) - 9\,\rho\;(\rho'\rho'' - \rho\rho''')}{36\,\rho'^2 + (2\,\rho'^2 - 3\,\rho\rho'')^2}$$

que de acuerdo a (17) demuestra la propiedad enunciada.

Para terminar consideremos como ejemplo el caso de la espiral logarítmica, cuya ecuación escribiremos en la forma

$$z = s \cos \alpha \, e^{i \operatorname{tg} \alpha \, l \, . \, s \cos \alpha}$$

siendo s el arco y α una constante. Derivando se obtendrá

$$z' = e^{i\vartheta} = e^{i\,(\alpha + \operatorname{tg} \alpha \, l \, . \, s \cos \alpha)} \quad .\,\dot{} \quad \rho = \frac{1}{\vartheta'} = \frac{s}{\operatorname{tg} \alpha} \ ; \ \rho' = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} ; \ \rho'' = 0$$

y por lo tanto los valores de u y v serán constantes, y las parábolas de máximo contacto, así como las cónicas de máximo contacto (elipses) tendrán, en virtud de las (14), (15) y (16) sus centros y focos sobre una espiral logarítmica idéntica a la curva dada, de manera que con *Bernoulli* puede repetirse «eadem mutata resurgo».

Nota. — El Profesor Terracini nos hace observar que la propiedad relativa a la espiral logarítmica puede preverse, como sucede con otras propiedades análogas, debido a que la curva admite un grupo ∞^1 de semejanzas en sí misma, y que por lo tanto lo mismo ocurre con la curva lugar del foco de la cónica de máximo contacto, de manera que una cualquiera C de estas curvas es una curva W (de Klein-Lie) con respecto al mismo grupo. De acuerdo con propiedades generales de las curvas W las homografías que tienen unidos los 3 puntos fijos de dicho grupo (polo de la espiral y puntos cíclicos) intercambian las curvas W invariantes por el grupo; luego C es semejante a la espiral y por consiguiente igual.

José Babini