# SOBRE LA INTEGRAL $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$.

por Angel J. Guarnieri

1. — En la cuestión elemental N°. 10 (Vol. VII, pág. 86) se pide calcular esta integral entre los límites 0 y 1 y entre 1 e $\infty$. Para ello basta darle la forma de integral euleriana, poniendo $x=\sqrt{y}$ en el primer caso y $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$ en el segundo. Resulta:

$$I_1=\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{-1/2}(1-y)^{-2/3}\,dy=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{5}{6})}$$

$$I_2=\int_1^\infty \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{-5/6}(1-y)^{-2/3}\,dy=\frac{1}{2}B\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

Es fácil probar que $I_2$ vale el doble de $I_1$. En efecto:

$$\frac{I_2}{I_1}=\frac{\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{5}{6})}{\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2}=\frac{\pi/\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\pi}=2,$$

pues

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}} \qquad \text{y} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

2. — En el tema N°. 27 del mismo volumen (pág. 80) se propone expresar la misma integral en forma de integral elíptica de Legendre. Tal expresión es posible, pues poniendo $y=(1-x^2)^{1/3}$ se tiene una curva algebraica de género 1.

Como es sabido, el género de una curva es la diferencia entre el máximo de puntos dobles y de retroceso que corresponde a su orden: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, y el número de los que realmente tiene: $g=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-r$. Las curvas de género 0 son las unicursales, es decir aquellas cuyas coordenadas cartesianas se pueden expresar en función racional de un parámetro; las de género 1, o elípticas, admiten una expresión de sus coordenadas mediante funciones elípticas de un parámetro. Estas tienen $\frac{1}{2}n(n-3)$ puntos dobles y de retroceso. Las cúbicas $(n=3)$ pueden tener a lo más uno de tales puntos; en tal caso son unicursales, y tomando el punto singular como origen se puede adoptar como parámetro la pendiente del radio vector. Las que carecen de un tal punto son de género 1 o elípticas; se demuestra que mediante una perspectiva se puede reducirlas siempre a la forma $y^2=4x^3-g_2x-g_3$, expresión bien conocida en la teoría de las funciones elípticas de Weierstrass; haciendo $x=p(t)$ resulta $y=p'(t)$.

Según una de las fórmulas de Plücker, la clase de una curva es $k=n(n-1)-2d-3r$; luego las cúbicas de género 1 son de 6ª. clase, mientras las unicursales son de 4ª. o 3ª.

La curva en cuestión es una cúbica sin punto doble, pues la derivada $y'=-\frac{2x}{3(1-x^2)^{2/3}}$ toma en cada punto un valor (real) único. Luego es de género 1, y la integral propuesta se podrá expresar mediante funciones elípticas, lo cual se logra así:

Sea $I=\int_x^\infty \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$. La sustitución $1-x^2=-z^3$ la reduce a la forma normal de Weierstrass, con $g_2=0$ y $g_3=-4$: $I=\frac{3}{2}\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{z^3+1}}=3\int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3+4}}=3u \therefore z=p(u\,;0,-4)$. Las raíces de $z^3+1$ son: $e_1=-1$, $e_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $e_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; poniendo: $H^2=(e_1-e_2)(e_1-e_3)=\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 3$, los tratados indican la sustitución: $z = e_1 + H \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = -1 + \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$. De aquí: $z^3 + 1 = 3\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\left(1 - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2}\right)$

y $dz = \left(\sqrt{3} \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \middle| \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$; por tanto:

$$I = \frac{3}{2} \int_{\varphi}^{\pi} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \,.\, d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{3} \,.\, \sqrt[4]{3} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^4 \frac{\varphi}{2} - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^4 \frac{\varphi}{2} + \operatorname{sen}^4 \frac{\varphi}{2} - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

y como la expresión bajo raíz es igual a

$$\frac{1}{4}[(1 + \cos\varphi)^2 + (1 - \cos\varphi)^2 - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2\varphi] =$$

$$= \frac{1}{4}[2 + 2\cos^2\varphi - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2\varphi] = \frac{1}{4}[4 - (2 + \sqrt{3}) \operatorname{sen}^2\varphi] =$$

$$= 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} \operatorname{sen}^2\varphi = 1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi, \quad \text{queda finalmente:}$$

$$I = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \left[\int_0^{\pi} - \int_0^{\varphi}\right] = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} [2k - F(\varphi, k)],$$

siendo $F(\varphi, k)$ la integral elíptica de 1ª. especie de Legendre. Haciendo $k = \operatorname{sen}\vartheta$, se tiene: $\operatorname{sen}\vartheta = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}|2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}}$ $= \cos 15^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ \therefore \vartheta = 75^\circ$; esta expresión del módulo $k$ mediante un ángulo se utiliza en las tablas de Legendre.

Se calculará ahora la integral propuesta entre los límites 0 y 1, y entre 1 e $\infty$. La correspondencia entre los límites de las tres variables $x, z, \varphi$ es:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ : | 0 | 1 | $\infty$ |
| $z$ : | $-1$ | 0 | $\infty$ |
| $\varphi$ : | 0 | $\varphi_1$ | $\pi$ |

La integral completa $K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \mathrm{sen}^2\varphi}}$ vale, según las tablas: $K = 2{,}76806$. El ángulo $\varphi_1$ se obtiene haciendo $z = 0$ en la expresión $z = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \therefore \mathrm{tg}\frac{\varphi_1}{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, y $\varphi_1 = 74^\circ\, 27' 18''$.

$$\text{Resulta: } \int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \mathrm{sen}^2\varphi}} =$$

$$= 1{,}13975 \times 1{,}84537 = 2{,}10326.$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \mathrm{sen}^2\varphi}} = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \left[ \int_0^{\pi} - \int_0^{\varphi_1} \right] =$$

$$\frac{\sqrt[4]{27}}{2} \left[ 2k - \int_0^{\varphi_1} \right] = \frac{\sqrt[4]{27}}{2} [2 \times 2{,}76806 - 1{,}84537] = 1{,}13975 \times 3{,}69074$$

$= 4{,}20652$, que es el doble de la anterior, como ya se vió.

El problema queda, pues, resuelto. Las consideraciones que siguen exceden la cuestión propuesta, pero ofrecen algún interés.

3. — *Inversión de la integral.* Conviene tener el módulo complementario $k'$ y el otro período $ik'$ : $k'^2 = 1 - k^2$, $k' = \cos 75^\circ = \mathrm{sen}\, 15^\circ$; con este valor las tablas dan: $k' = 1{,}59814$. Se tiene, pues:

$$k^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \quad k = \mathrm{sen}\, 75^\circ \therefore K = 2{,}76806$$

$$k'^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \quad k' = \mathrm{sen}\, 15^\circ \therefore K' = 1{,}59814.$$

Utilizando la notación de Weierstrass: $\frac{1}{3}\, I = u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3+4}}$

$\therefore z = p\,(u\,;\, 0, -4)$ y $x^2 = 1 + z^3 = 1 + p^3\, u$. Los períodos son:

$$\omega_1 = \int_{-1}^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3+4}} = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{H}} = \frac{2{,}76806}{\sqrt[4]{3}} = 2{,}10326\ ;\ \omega_2 = i \int_1^\infty \frac{dy}{\sqrt{4y^3-4}} =$$

$$\frac{i\mathrm{K}'}{\sqrt{H}} = i\, \frac{1{,}59814}{\sqrt[4]{3}} = 1{,}21431\, i.$$

Con las funciones de Jacobi: $\frac{1}{3}\, I = u = \frac{1}{2\sqrt[4]{3}} \int_{\varphi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$

$\therefore \operatorname{sen}(\pi-\varphi) = \operatorname{sn} t$, siendo $t = 2\sqrt[4]{3}\,.\,u$. Entonces: $\cos\varphi = -\operatorname{cn} t$,

y $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{1+\operatorname{cn} t}{1-\operatorname{cn} t}$ ; de aquí: $z = -1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = -1+\sqrt{3}\,\frac{1+\operatorname{cn} t}{1-\operatorname{cn} t}$, $x^2 = 1 + z^3 = 3\sqrt{3}\,\frac{[(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\operatorname{cn}^2 t](1+\operatorname{cn} t)}{(1-\operatorname{cn} t)^3}$

$= 3\sqrt{3}\,\frac{[4-(2+\sqrt{3})\operatorname{sn}^2 t]\operatorname{sn}^2 t}{(1-\operatorname{cn} t)^4} = 12\sqrt{3}\,\frac{1-k^2\operatorname{sn}^2 t}{(1-\operatorname{cn} t)^4}\operatorname{sn}^2 t = \sqrt{27}\,\frac{\operatorname{dn}^2 t.\operatorname{sn}^2 t}{(1-\operatorname{cn} t)^4}$

Adoptando el signo $+$ : $x = 2\sqrt{27}\,\frac{\operatorname{dn} t.\operatorname{sn} t}{(1-\operatorname{cn} t)^2}$. Los períodos $k$ y $ik'$ ya fueron calculados.

Se ve que: $p\,u = -1+\sqrt{3}\,\frac{1+\operatorname{cn}(2\sqrt{3}.u)}{1-\operatorname{cn}(2\sqrt{3}.u)}$. En efecto, cuando el discriminante $g_2{}^3 - 27\,g_3{}^2$ es negativo, las funciones de Weierstrass y Jacobi están ligadas por la relación: $p\,u = e_1 + H\,\frac{1+\operatorname{cn}(2\sqrt{H}.u)}{1-\operatorname{cn}(2\sqrt{H}.u)}$.

4. — *La integral en el campo complejo.* La integral de Schwarz: $\omega = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{(1-z^2)^{2/3}}$ tiene la interesante propiedad de transformar el eje real del plano $z$ en un triángulo equilátero del plano $\omega$, dispuesto como muestra la figura.

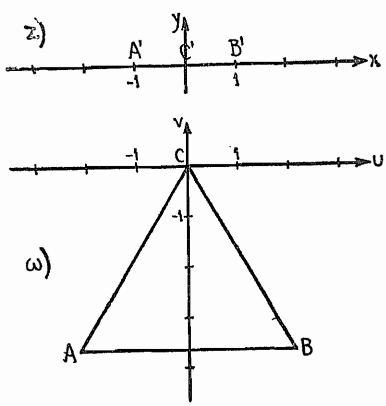


Fig. 1

En efecto: $\omega' = (1 - z^2)^{-2/3}$, $\operatorname{Arg}\omega' = -\frac{2}{3}[\operatorname{Arg}(1+z) + \operatorname{Arg}(1-z)]$. Cuando $z$ recorre el eje real, se tiene:

$$z < -1;\ \operatorname{Arg}\omega' = -\frac{2}{3}(\pi + 0) = -\frac{2}{3}\pi$$
$$-1 < z < 1;\ \operatorname{Arg}\omega' = -\frac{2}{3}(0 + 0) = 0$$
$$z > 1;\ \operatorname{Arg}\omega' = -\frac{2}{3}(0 - \pi) = \frac{2}{3}\pi.$$

Como $\operatorname{Arg}\omega'$ es el ángulo que forman las curvas correspondientes en la transformación, se ve que a la semirrecta $(-\infty, -1)$ corresponde un segmento de recta girado respecto de ella $-\frac{2}{3}\pi$ (lado $CA$); al segmento $(-1, +1)$, el lado $AB$, y a la semirrecta $(1, \infty)$, el $BC$, resultando un triángulo equilátero. El vértice $C$ está en el origen, pues a $z = \infty$ corresponde $\omega = 0$. La longitud del segmento $\overline{AB}$ es, evidentemente: $\overline{AB} = \omega_2 - \omega_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}} = 4{,}20652$, según se calculó antes. Si se utiliza el $CA$, se tiene $\Delta\omega = \Delta z \,.\, e^{-\frac{3}{2}\pi i}$, $|\Delta\omega| = |\Delta z| = \Delta z$; luego: $\overline{CA} = |\omega_1| = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$, y análogamente: $\overline{BC} = |\omega_2| = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1-x^2)^{2/3}}$. Se ve ahora porque se verifica que $\int_1^{\infty} = 2\int_0^1$.

Si en vez de $\infty$ se toma un valor real cualquiera $a$ como límite inferior de la integral, el triángulo experimenta una traslación cuya magnitud está dada por $-\int_{\infty}^{a}$, pues $\omega = \int_{\infty}^{z} = \int_{\infty}^{a} + \int_{a}^{z} = \int_{\infty}^{a} + \omega' \therefore \omega' = \omega - \int_{\infty}^{a}$. Si se multiplica la integral por una constante $C \neq 0$, el lado del triángulo queda multiplicado por $|C|$ y éste gira de un ángulo igual a $\operatorname{Arg} C$.

Es innecesario agregar que la representación es conforme, excepto en los vértices del triángulo, en que se anula $\omega' \sigma \frac{1}{\omega'}$.

Hasta aquí se ha considerado la correspondencia entre el eje real y el contorno del triángulo. En cuanto al interior de éste, es fácil ver que corresponde al semiplano superior del plano $z$, pues, como la transformación conforme conserva el sentido de los ángulos, a puntos situados a la izquierda del contorno cuando se lo recorre en sentido positivo, deben corresponder puntos también a la izquierda del eje $x$.

Esto no significa que el exterior del triángulo corresponda al semiplano inferior. En realidad, la transformación aquí establecida corresponde a una determinación del argumento de $\sqrt[3]{(1-z^2)^2}$, que tiene 3 valores. En el plano $z$ hay que considerar una superficie de Riemann de 3 hojas, obtenida cortándolo según el eje real de 1 a $+\infty$ y de 1 a $-\infty$, pues $-1$ y $+1$ son puntos de ramificación de 2°. orden. Si un punto describe una curva cerrada alrededor de $B'$, por ejemplo, (que no contenga a $A'$), el correspondiente describe también una curva cerrada alrededor de $B$ (no conteniendo al $A$). Pero mientras esta última consta de una sola vuelta, la otra tiene tres, una en cada hoja de la superficie de Riemann; al atravesar el punto móvil la semirrecta $(1, +\infty)$ pasa a otra hoja, pero ésto no sucede al atravesar el segmento $(-1,+1)$. Cuando el 1er. punto (en $z$) describe un ángulo $\pi$, el 2°. (en $\omega$) describe uno de $\frac{\pi}{3}$; considerando 6 ángulos iguales alrededor de $B$, corresponden sucesivamente a los semiplanos superiores e inferiores de las 3 hojas, aunque no la totalidad de la superficie limitada por sus lados. En efecto: según un teorema de Schwarz, si una función analítica toma valores reales a lo largo de una curva, toma valores conjugados en puntos simétricos respecto de la misma. A lo largo de $AB$ la función $z = f(\omega)$ es real; luego al triángulo $ABC_1$, simétrico del $ABC$ (en $\omega$), debe corresponder el semiplano inferior de la 1ª. hoja (en $z$), simétrico del superior. Aplicando este «principio de las imágenes» se establece la correspondencia más general entre los planos $z$ y $\omega$: La reflexión en $(1,+\infty)$ del semiplano inferior de la 1ª. hoja da el semiplano superior de la 2ª., al cual corresponderá el triángulo $BA_1C_1$, simétrico del $BAC_1$, etc.; así siguiendo, resulta un exágono regular de centro $B$ y lado $CA$, que representa la totalidad del plano $z$. Si ahora se refleja el $BC_2A_2$ en $C_2A_2$ se obtiene el $B_3C_2A_2$, y reflejando el semiplano superior de la 3ª. hoja en la semirrecta $(-\infty, -1)$ se obtiene el inferior de

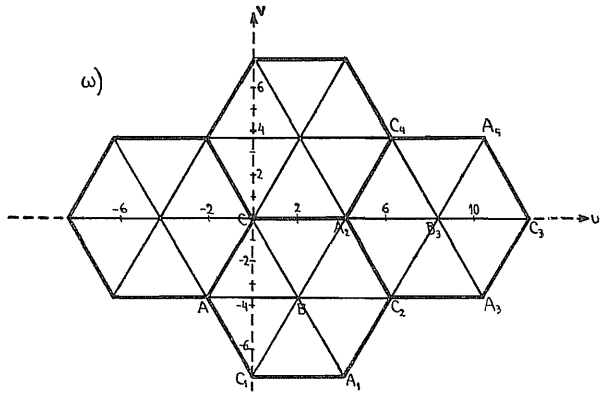


Fig. 2

la 1ª., luego el exágono de centro $B_3$ y lado $A_2C_2$ también representa la totalidad del plano $z$. Es decir, este plano está representado por cualquier exágono de una red dibujada en el $\omega$, y como estos exágonos se reproducen en dos dimensiones, la función $z = z(\omega)$ es doblemente periódica, y elíptica por ser polos sus únicas singularidades. Este resultado no constituye, desde luego, ninguna novedad, pues se vió anteriormente que $z^2 = 1 + p^3\left(\frac{\omega}{3}\right)$.

La función $p\left(\frac{\omega}{3}\right)$, definida en el plano $\omega$, tiene sus polos dobles en los puntos $C$, y sus ceros en los $A$ y $B$. Es sabido que no tiene otras singularidades. El período real $2\Omega_1$, con la variable $\omega$, es el segmento $CC_3 = 3\,l = 3 \times 4{,}20652$; con la variable $u = \frac{\omega}{3}$ se reduce a la 3ª. parte: $2\,\omega_1 = 4{,}20652$. El período imaginario $2\Omega_2$, con $\omega$, es el segmento $CC_1 = 2\,h = l\sqrt{3} = \sqrt{3} \times 4{,}20652$; con $u$ es: $2\,\omega_2 = \dfrac{4{,}20652}{\sqrt{3}} = 2{,}42863i$. Estos valores coinciden con los calculados antes, en la inversión de la integral. Por ser negativo el discriminante de la ecuación $p'u = 4p^3u + 4$, los períodos $2\omega_1$ y $2\omega_2$ no son primitivos; lo son, en cambio, los imaginarios conjugados $2\omega' = \omega_1 + \omega_2 = \frac{1}{3}2\Omega'$ y $2\omega'' = \omega_1 - \omega_2 = \frac{1}{3}2\Omega''$ siendo $\Omega' = CC_4$ y $\Omega'' = CC_2$.

Transformando el eje real del plano $z$ en una circunferencia del plano $t$, se obtendrá en definitiva una función que transforma la circunferencia en triángulo. Es sabido que lo primero se logra con una función de la forma $z = \alpha\,\frac{\beta+t}{\gamma+t}$. Eligien-

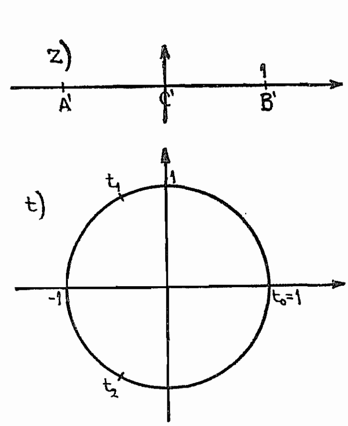


Fig. 3

do una circunferencia de centro en el origen y radio 1, y haciendo corresponder $t_0 = 1$ a $z = \infty$, y $t_1, t_2$ (de argumentos $\frac{2\pi}{3}$ y $-\frac{2\pi}{3}$) a $z = -1$ y $z = 1$, se calcula $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\alpha = -i\sqrt{3}$, y resulta: $z = i\sqrt{3}\,\frac{1+t}{1-t}$. Entonces: $dz = \frac{2i\sqrt{3}}{(1-t)^2}dt$, $1 - z^2 = 1 + 3\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 = 4\frac{1+t+t^2}{(1-t)^2} = 4\frac{1-t^3}{(1-t)^3}$, y $\int_\infty^z \frac{dz}{(1-z^2)^{2/3}} = i\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\int_1^t \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}}$

Luego la función $\omega = C\int_1^t \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}}$ transforma al círculo dado en triángulo equilátero.

El problema de la representación conforme de triángulos y, en general, polígonos, mediante círculos fué resuelto por Christoffel y especialmente H. A. Schwarz basándose en el teorema fundamental de Riemann, pues son recintos simplemente conexos. Dado un triángulo cualquiera de vértices $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ y ángulos exteriores $\lambda_1\pi, \lambda_2\pi, \lambda_3\pi$ ( $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2$ ), y tres puntos $z_1 z_2 z_3$ de un círculo cualquiera, la función que transforma éste en aquél es:

$$\omega = k \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}(z-z_3)^{\lambda_3}} + k' \text{ siendo } k \neq 0 \text{ y } k' \text{ constantes.}$$

Se ve que la función antes considerada: $\omega = k \int_1^t \frac{dt}{(1-t^3)^{2/3}}$

es un caso particular de aquélla, con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{2}{3}$ y $t_n = e^{\frac{2}{3}n\pi i}$

Aquélla, a su vez, es caso particular de la siguiente, que transforma un círculo en un polígono convexo de $s$ lados:

$$\omega = k \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{(z-z_1)^{\lambda_1}(z-z_2)^{\lambda_2}\ldots(z-z_s)^{\lambda_s}} + k'.$$

Por ejemplo, si se eligen como puntos $z_i$, sobre una circunferencia de radio 1 y centro en el origen, las 4 raíces de la unidad, y se toma $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2}$, y además $k = 1$, $k' = 0$, resulta: $\omega = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$, que transforma el círculo en un cuadrado.

Para obtener cualquier polígono regular sirve: $\omega = \int_0^z \frac{dz}{(1-z^n)^{\frac{n}{2}}}$.

Escuela de Ingeniería, San Juan.