TEMA RESUELTO

33. *Demostrar la identidad*

$$n\, u_n = \sum_{p+q+r=n-1} u_p\, u_q\, u_{r+1} - d \sum_{p+q+r=n-2} u_p\, u_{q+1}\, u_{r+1}$$

donde con $n!\, u_n = n^{(n,d}$ *se indica la factorial de grado y base iguales a* n *y diferencia* d.

Solución. La identidad anterior podrá escribirse

$$n\, u_n = \sum_{p+r=n-1} u_p\, u_{r+1} + (1-d) \sum_{p+q+r=n-2} u_p\, u_{q+1}\, u_{r+1}. \qquad (1)$$

Transformemos la primera sumatoria aplicando el binomio de Vandermonde. Será

$$\sum_{p+r=n-1} u_p\, u_{r+1} = \sum_{r+p+q=n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!} \frac{(-r-1)^{(q,d}}{q!} \frac{(r+1)^{(r+1,d}}{(r+1)!}$$

$$= \sum_{p+q+r=n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!} \binom{q+r}{r} (-1)^q \frac{[(q+r)d+(r+1)(1-d)]^{(q+r,d}}{(q+r)!}.$$

Para $q+r$ constante, la sumatoria en r es

$$\Delta^{q+r}[(q+r)\,d+1-d]^{(q+r,d} = (q+r)!\,(1-d)^{q+r}$$

con lo que la primera sumatoria de (1) se convierte en

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!} (1-d)^{n-1-p}.$$

Con semejantes transformaciones la segunda sumatoria de (1) es

$$\sum_{p=0}^{n-2} \frac{n^{(p,d}}{p!} \sum_{q+r=n-2-p} (1-d)^{n-2-p} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!} (1-d)^{n-2-p} (n-1-p),$$

y el segundo miembro de (1) es

$$\sum_{p=0}^{n-1} \frac{n^{(p,d}}{p!} (1-d)^{n-1-p} (n-p)$$
$$= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{n^{(p+1,d}}{p!} (1-d)^{n-1-p} - \sum_{p=1}^{n-1} \frac{n^{(p,d}}{(p-1)!} (1-d)^{n-p} = \frac{n^{(n,d}}{(n-1)!} = n\, u_n$$

y la identidad queda demostrada.

Tal identidad es trivial para $d=1$, mientras que para $d=0$ se convierta en la siguiente identidad entre potencias de base y grado iguales

$$\frac{n^n}{(n-1)!} = \sum_{p+q+r=n-1} \frac{p^p}{p!} \cdot \frac{q^q}{q!} \cdot \frac{(r+1)^{r+1}}{(r+1)!}\,.$$

En: J. Babini, *Series cuyos coeficientes contienen factoriales* (Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. I, p. 17, Buenos Aires, 1937) puede verse otra demostración de la identidad propuesta, así como de otra más general que da lugar a casos particulares sencillos como por ejemplo

$$(2n+1)\, u_n = \sum_{p+q+r=n} u_p\, u_q\, u_r \qquad \text{con} \qquad u_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

José Babini