SOBRE UN PROBLEMA DE JUAN BERNOULLI

(Cuarta Parte)

por J. V. Uspensky

15. Queda que examinemos el caso de S par siendo todavía n par. Entonces Q_n es necesariamente impar. Sea

$$mR + \frac{S}{2} \equiv r_m \pmod S; \quad 0 \leqq r_m < S.$$

Entonces para encontrar K tenemos condiciones

$$\left[\frac{r_m}{S} + m\omega\right] = \left[\frac{r_m}{S} + \frac{K}{S}\right]$$

para $m = 0, 1, 2, \ldots, S-1$. Puesto $r_m = S - i$ de las congruencias

$$mR \equiv -\frac{S}{2} - i \pmod S$$

$$Q_n R \equiv -1 \pmod S$$

resulta

$$m \equiv Q_n i + \frac{S}{2} \pmod S.$$

En caso

$$Q_n i + \frac{S}{2} < S,$$

lo que se verifica cuando

$$2i \leqq \mu,$$

la desigualdad

$$\frac{r_m}{S} + m\omega \geqq 1$$

no está satisfecha a menos que

$$2i \leqq x_n - \mu$$

o bien

$$2i \leqq a_n - \mu.$$

Luego si ρ es el máximo entero tal que

$$2\rho \leqq \mu, \quad 2\rho \leqq a_n - \mu$$

tendremos

$$\left[\frac{K}{S} - \frac{i}{S}\right] = 0$$

para $i = 1, 2, \ldots, \rho$. Por otra parte, pues que

$$\frac{\left(Q_n i - \frac{S}{2}\right)(x_n - \mu)}{S(Q_n x_n + Q_{n-1})} < \frac{i}{S}$$

tendremos

$$\left[\frac{K}{S} - \frac{i}{S} + 1\right] = 0$$

para $i = \rho + 1, \rho + 2, \ldots$. Luego necesariamente $K = \rho$. Busquemos ahora el mínimo m tal que

$$\frac{r_m}{S} + m\omega \geqq 1$$

mientras $i \geqq \rho + 1$. Sustituyendo

$$m = \left(c + \frac{1}{2}\right) S + Q_n i$$

hallamos

$$c+\frac{1}{2}\geqq\frac{i}{x_n-\mu}$$

y para que m sea mínimo es preciso tomar $i=\rho+1$ y buscar el mínimo entero c tal que

$$c+\frac{1}{2}\geqq\frac{\rho+1}{x_n-\mu}.$$

Si

$$2\rho+2\leqq x_n-\mu$$

o bien

$$2\rho+2\leqq a_n-\mu$$

tenemos $c=0$ y en caso contrario $c=1$. En efecto

$$2\rho\leqq a_n-\mu\leqq x_n-\mu$$

$$2\leqq 2(x_n-\mu)$$

y por tanto

$$2\rho+2\leqq 3(x_n-\mu).$$

En lo sucesivo distinguimos dos casos: Q_{n+1} par y Q_{n+1} impar.

1º. Sea Q_{n+1} par. Entonces $a_n-\mu$ es par también. En caso $\mu<a_n-\mu$ debe ser $2\rho\leqq\mu$, es decir

$$2\rho=\mu,\ 2\rho+2\leqq a_n-\mu \text{ si } \mu \text{ es par}$$

$$2\rho=\mu-1,\ 2\rho+2=\mu+1\leqq a_n-\mu \text{ si } \mu \text{ es impar.}$$

En ambos casos $c=0$ y

$$m=\frac{\mu+2}{2}Q_n+\frac{S}{2}<\frac{(a_n-\mu+2)Q_n+S}{2}=Q_n+\frac{Q_{n+1}}{2}$$

$$m=\frac{\mu+1}{2}Q_n+\frac{S}{2}<\frac{(a_n-\mu+1)Q_n+S}{2}=\frac{Q_n+Q_{n+1}}{2}$$

de dondé se concluye que $\frac{R}{S}$ no es aproximación óptima. Sea ahora $\mu\geqq a_n-\mu$. Entonces

$$2\rho = a_n - \mu, \quad 2\rho + 2 > a_n - \mu$$

y luego $c = 1$. Por consiguiente

$$m = \frac{Q_n(a_n - \mu + 2)}{2} + \frac{3}{2} S = Q_n + \frac{Q_{n+1}}{2} + S.$$

Vamos a ver que efectivamente este número es el punto de divergencia para $\frac{R}{S}$. Con tal objeto busquemos el mínimo m al cual corresponde $i \leqq \rho$ y tal que

$$\frac{r_m}{S} + m\omega \geqq 2.$$

El tal m será

$$m = \left(h + \frac{1}{2}\right) S + Q_n$$

con h entero mínimo que satisface la desigualdad

$$2h + 1 \geqq 2Q_n + \frac{2S+2}{x_n - \mu}.$$

La desigualdad

$$\left(h + \frac{1}{2}\right) S + Q_n > Q_n + \frac{Q_{n+1}}{2} + S.$$

resulta equivalente a

$$(2h - 1)\, S > Q_{n+1}.$$

Ya que

$$2h + 1 \geqq 3Q_n + 2$$

tenemos

$$(2h - 1)\, S \geqq 3Q_n S > Q_{n+1}$$

lo que se quería demostrar.

2º. Sea ahora Q_{n+1} impar y luego $a_n - \mu$ impar también. Suponiendo $\mu < a_n - \mu$ y μ impar tenemos

$$2\rho = \mu - 1,\ 2\rho + 2 < a_n - \mu.$$

En caso μ par y $\mu + 1 < a_n - \mu$ tenemos $2\rho = \mu$, $2\rho + 2 < a_n - \mu$.

En ambos casos $c = 0$ y

$$m = Q_n(\rho + 1) + \frac{1}{2}S < \frac{a_n - \mu}{2} Q_n + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} Q_{n+1}$$

y por tanto no es $\frac{R}{S}$ aproximación óptima. Sea ahora $\mu+1=a_n-\mu$; entonces $2\rho + 2 = a_n - \mu + 1$ y $c = 1$. Finalmente si $\mu \geqq a_n - \mu$, tenemos $2\rho = a_n - \mu - 1$, $2\rho + 2 = a_n - \mu + 1$ y otra vez $c = 1$, de modo que

$$m = \frac{a_n - \mu + 1}{2} Q_n + \frac{3}{2} S = \frac{Q_n + Q_{n+1}}{2} + S.$$

en tanto que $\mu + 1 \geqq a_n - \mu$ y este número será efectivamente el punto de divergencia correspondiente a $\frac{R}{S}$. Basta verificar la desigualdad

$$(2h - 1)\, S > Q_{n+1} - Q_n$$

donde h es el mínimo entero tal que

$$2h + 1 \geqq 2Q_n + \frac{2S+2}{x_n - \mu}.$$

En caso $Q_n \geqq 3$ tenemos $2h + 1 \geqq 7$. En caso $Q_n = 1$, puesque $x_n - \mu \leqq \mu + 1 + \vartheta,\ \vartheta < 1$

$$\frac{2S+2}{x_n - \mu} > 1$$

y por tanto $2h + 1 \geqq 5$. Luego

$$(2h - 1)S \geqq 3S > Q_{n+1} - Q_n$$

lo que es cierto.

Una discusión en todo análoga se refiere al caso de n impar y conduce a las mismas conclusiones, sólo que debemos tomar, atribuyendo el mismo significado a ρ que antes

$$K = -\rho \text{ para } S \text{ impar}$$

$$K = -\rho - 1 \text{ para } S \text{ par}$$

y en caso $n=1$, cuando $Q_1=1$, $Q_0=0$, suponer $2\mu > a_1$. Además en caso de x racional es preciso desarrollarle en fracción continua con impar número de elementos.

Si examinamos puntos de divergencia de todas las fracciones que pueden ser aproximaciones óptimas verificamos fácilmente que ellos crecen con crecientes denominadores y por tanto, en efecto, constituyan todas las aproximaciones óptimas posibles. Luego el problema está resuelto y queda sólo que presentemos la solución en forma definitiva conveniente para aplicación inmediata.

16. — Siendo $\frac{M}{N}$ una aproximación óptima presentaremos la correspondiente serie de Bernoulli bajo la forma

$$\left(\frac{M}{N}, \frac{\nu M}{N}\right)$$

más conveniente para aplicación. En lo sucesivo daremos valores de M y N junto con reglas para encontrar ν y el punto de divergencia L.

Convergentes principales: $M = P_n$, $N = Q_n$

1º. Q_n par.

$$\nu \equiv \frac{Q_n}{2} - Q_{n-1} \pmod{Q_n}, \; n \text{ par}$$

$$\nu \equiv \frac{Q_n}{2} \pmod{Q_n}, \; n \text{ impar}$$

$$L = Q_{n+1} + \frac{1}{2} Q_n \text{ si } Q_{n+2} > Q_{n+1} + Q_n$$

$$L = Q_{n+1} + \frac{3}{2} Q_n \text{ si } Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n.$$

2º. Q_n impar, Q_{n+1} par.

$$\nu \equiv (-1)^{n-1} \frac{Q_{n-1}}{2} \pmod{Q_n}, \quad Q_{n-1} \text{ par}$$

$$\nu \equiv (-1)^{n} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{2} \pmod{Q_n}, \quad Q_{n-1} \text{ impar}$$

$$L = Q_n + \frac{1}{2} Q_{n\pm1}.$$

3º. Q_n impar, Q_{n+1} impar y $\quad Q_{n+1} > Q_n + Q_{n-1}$

$$\nu \equiv (-1)^{n-1} \frac{Q_{n-1}}{2} \pmod{Q_n}, \quad Q_{n-1} \text{ par}$$

$$\nu \equiv (-1)^{n} \frac{Q_n - Q_{n-1}}{2} \pmod{Q_n}, \quad Q_{n-1} \text{ impar}$$

$$L = \frac{Q_n + Q_{n+1}}{2}.$$

<u>*Convergentes intermedias*: $M = \mu P_n + P_{n-1}$, $N = \mu Q_n + Q_{n-1}$</u>

4º. Q_n impar, Q_{n+1} par

$$2\mu \geqq a_n \quad \text{excepto} \quad n = 1; \quad \text{entonces} \quad 2\mu > a_1$$

$$\nu \equiv -\frac{Q_{n+1}}{2} \pmod{S}, \quad n \text{ par}$$

$$\nu \equiv -Q_n - \frac{Q_{n+1}}{2} \pmod{S}, \quad n \text{ impar}$$

$$L = Q_n + \frac{1}{2} Q_{n+1} + S.$$

5º. Q_n impar, Q_{n+1} impar.

$$2\mu + 1 \geqq a_n \quad \text{excepto} \quad n = 1; \quad \text{entonces} \quad 2\mu > a_1$$

$$\nu \equiv -\frac{Q_{n+1} - Q_n}{2} \pmod{S}, \quad n \text{ par}$$

$$\nu \equiv -\frac{Q_{n+1} + Q_n}{2} \pmod{S}, \quad n \text{ impar}$$

$$L = \frac{Q_n + Q_{n+1}}{2} + S.$$

Para el caso $b=0$ tenemos reglas siguientes: siempre $M = P_n$, $P = Q_n$ y

1º. n impar

$$\nu = 0$$

$$L = Q_n + Q_{n+1}.$$

2º. n par

$$\nu = Q_n - Q_{n-1}$$

$$L = Q_n + Q_{n+1}.$$

Hay que sustituir 0 por el primer término de la sucesión que resulta de la serie

$$\left(\frac{P_n}{Q_n}, \frac{\nu P_n}{Q_n}\right).$$

17. — Ahora, para terminar, examinemos algunos ejemplos numéricos.

Ejemplo 1. Se pide construir la tabla de $\left[m\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$ para $m = 1, 2, \ldots, 20$.

Tenemos la fracción continua

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}$$

con sus convergentes

$$\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{5}{8} \quad \frac{8}{13}$$

$$\underline{2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21.}$$

Números subrayados representan respectivos puntos de divergencia de los cuales 21 es el primero que sobrepasa 20. Según la regla del § 5 hallamos el período

$$01\,(01^2)^2$$

de la serie $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$. Ya que $P_6 = 5$, $Q_6 = 8$ tenemos $\nu = 8 - 5 = 3$; luego traspuestos 3 términos de izquierda a derecha logramos el grupo

$$1^2\,0\,1^2\,0\,1\,0$$

con cuya repetición y sustituyendo 0 por la primera unidad obtenemos la deseada sucesión de 20 términos

$$0\,1\,0\,1^2\,0\,1\,0\,1^2\,0\,1^2\,0\,1\,0\,1^2\,0\,1$$

y la tabla se construye del modo siguiente

$m =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
$\left[m\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] =$	0,	0,	1,	1,	2,	3,	3,	4,	4,	5,	6,	6,	7,	8,	8,	9,	9,	10,	11,	11,	12

Ejemplo 2. Se pide hallar el período mínimo de la sección de 30 términos de la serie $\left(\frac{13}{56}, \frac{1}{2}\right)$. Tenemos

$$\frac{13}{56} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1}}}}$$

de donde deducimos el conjunto de aproximaciones óptimas

$$\frac{M}{N} = \frac{0}{1} \quad \overset{*}{\frac{1}{3}} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{13} \quad \overset{*}{\frac{4}{17}} \quad \overset{*}{\frac{7}{30}} \quad \frac{10}{43} \quad \frac{13}{56}$$

$$L = 3, \quad 6, \quad 15, \quad 28, \quad 45, \quad 58, \quad 71$$

con sus puntos de divergencia; las convergentes intermedias llevan una estrellita encima.

El primer punto de divergencia que sobrepasa 30 es 45 y la aproximación óptima que corresponde a él es $\frac{4}{17}$. El período de la serie $\left(\frac{4}{17}, 0\right)$ es

$$0^4\,1\,(0^3\,1)^3$$

y según la regla

$$\nu \equiv -28 \equiv 6 \pmod{17}$$

de modo que $\nu = 6$. Luego el período buscado es $0^2\,1\,(0^3\,1)^2\,0^4\,1\,0$.

Ejemplo 3. Se pide construir la tabla de enteros próximos $\{m\sqrt{2}\}$ para $m = 1, 2, \ldots, 20$.

De la fracción continua

$$\sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

se deduce

$$\frac{M}{N} = \frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{5} \quad \overset{*}{\frac{3}{7}} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{12}{29}$$

$$L = 2, \quad 6, \quad 11, \quad 18, \quad 35$$

El período de la serie $\left(\frac{5}{12}, 0\right)$ es $0^2\,1\,0\,1\,0^2\,1\,(0\,1)^2$ y según la regla

$$\nu \equiv 6 - 5 \equiv 1 \pmod{2}; \quad \nu = 1.$$

Traspuesto 0 a la derecha logramos el grupo $(0\,1)^2\,0^2\,1\,(0\,1)^2 0$ de cuya repetición resultan 20 términos deseados

$$(0\,1)^2\,0^2\,1\,(0\,1)^2\,0\,(0\,1)^2\,0^2\,1\,0$$

y la construcción de la tabla se acaba del modo siguiente

$m=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	1	2	1
$\{m\sqrt{2}\} = 0,$	1,	3,	4,	6,	7,	8,	10,	11,	13,	14,	16,	17,	18,	20,	21,	23,	24,	25,	27,	28