DIRECTIONS DE JULIA ET DIRECTIONS DE PICARD DES FONCTIONS ENTIERES (*)

par Georges Valiron
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

G. Julia a montré qu'étant donnée une fonction entière $f(z)$, ou plus généralement une fonction holomorphe autour du point à l'infini qui est point singulier essentiel, il existe au moins une direction, ou demi-droite Δ définie par $\arg z = \varphi_0 = \text{const.}$, telle que le théorème de Picard reste vrai dans tout angle A de sommet origine et de bissectrice Δ. C'est dire que, dans un tel angle A, $f(z)$ prend une infinité de fois toute valeur finie sauf au plus une seule valeur exceptionnelle. Ce théorème de Julia s'applique aussi à la plupart des fonctions méromorphes autour du point à l'infini lorsque ce point est point limite de pôles. Les démonstrations de Julia s'appuyent sur la théorie des familles normales de Montel. Ostrowski a apporté d'importants compléments aux résultats de Julia: il a déterminé complètement la classe des fonctions méromorphes qui font exception au théorème; il a montré que:

Il existe sur Λ une suite de points z_n s'éloignant indéfiniment lorsque n croît indéfiniment qui jouissent de la propriété suivante. A tout couple de nombres ε, d correspond un entier $N(\varepsilon, d)$ tel que $f(z)$ prend dans tout cercle $|z - z_n| < \varepsilon |z_n|$, de rang supérieur à $N(\varepsilon, d)$, toute valeur représentée sur la sphère de rayon 1 à l'extérieur de deux cercles de rayon d (ces cercles dépendent de n).

Ce sont de tels cercles que Milloux appelle cercles de remplissage.

(*) Trabajo expuesto por el Prof. G. Valiron en la sesión realizada en su honor, el 2 de agosto de 1946, por la Unión Matemática Argentina.

J'ai proposé (Journal de math., 1928) de réserver le nom de directions de Julia aux directions Δ jouissant de la propriété qui vient d'être donnée et d'appeler d'une façon générale directions de Picard toute direction Δ possédant la propriété donnée au début: le théorème de Picard s'applique dans tout angle de bissectrice Δ. Les fonctions méromorphes sauf à l'origina et au point à l'infini qui restent invariantes par la substitution (z, sz), où $|s|>1$, donnent des exemples de directions de Picard qui ne sont pas directions de Julia: si l'argument de s est incommensurable à π, toute direction est direction de Picard et il n'y a pas de direction de Julia. Mais je n'avais pas su montrer qu'il existe des fonctions holomorphes autour du point à l'infini qui possèdent des directions de Picard qui ne sont pas directions de Julia. C'est cette lacune que je me propose de combler ici.

Considérons les deux fonctions entières d'ordre nul

$$g(z)=\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right) \quad , \quad h(z)=\prod_1^{\infty}\left(1-\frac{z}{b_n}\right).$$

Les nombres a_n sont pris réels positifs, on suppose

$$a_1=2\pi, \quad a_{n+1}\geqq a_n{}^2, \quad n=1,2,\ldots, \quad \frac{a_n}{2\pi} \text{ entier.}$$

Les nombres b_n ont tous le même argument ω compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$ et incommensurable à π. On a, en général $|b_n|=a_n$, mais pour une suite infinie de valeurs de n, qui seront définies plus loin, on aura seulement

$$\frac{3}{4}<\frac{|b_n|}{a_n}<\frac{5}{4}.$$

Si l'on suppose

$$\text{(1)} \qquad \frac{a_n}{2}<|z|<2a_{n+1},$$

on trouve facilement que l'on a

$$g(z)=(-1)^{n-1}\frac{z^{n-1}}{a_1 a_2\ldots a_{n-1}}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)\left(1-\frac{z}{a_{n+1}}\right)\left(1+\frac{0(1)}{\sqrt{|z|}}\right)$$

(0(1) désignant un nombre qui reste borné lorsque $|z|$ croit indéfiniment) et l'on a la même égalité pour $h(z)$, les b_n remplaçant les a_n. Il s'ensuit que, dans la couronne (1) la fonction méromorphe

$$F(z)=\frac{h(z)}{g(z)}$$

est égale à

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} \frac{z-b_n}{z-a_n} \frac{z-b_{n+1}}{z-a_{n+1}} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\left(1+\frac{0(1)}{\sqrt{|z|}}\right). \tag{2}$$

Si l'on suppose $|b_n|=a_n$ et si l'on prend $z=a_n e^{i\varphi}$, $F(z)$ prend la valeur

$$F_n=\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} \frac{e^{i\varphi}-e^{i\omega}}{e^{i\varphi}-1}\left(1+\frac{0(1)}{a_{n-1}}\right). \tag{3}$$

Supposons maintenant que z' appartienne à une couronne (1) quelconque, son argument φ étant fixe et compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π. D'après l'expression (2), lorsque z décrit le cercle

$$|z-z'|<\varepsilon|z'|$$

on a

$$F(z)=F(z')\, e^{\lambda}$$

avec

$$\lambda=\log\left(\frac{z'-b_n}{z-b_n} \frac{z-a_n}{z'-a_n} \frac{z'-b_{n+1}}{z-b_{n+1}} \frac{z-a_{n+1}}{z'-a_{n+1}}\right)+\frac{0(1)}{\sqrt{|z'|}}. \tag{4}$$

Il s'ensuit facilement que

$$|\lambda|<0(1)\,\varepsilon$$

et

$$F(z)=F(z')\,(1+\varepsilon\, 0(1)).$$

Cette égalité permet d'affirmer que la direction d'argument φ

considéré n'est pas direction de Julia: la famille de fonctions $F(tz)$ où t est réel positif arbitraire est normale pour tous les points z d'argument φ.

D'autre part, lorsque le point z décrit le cercle

$$(5) \qquad |z - a_n e^{i\varphi}| < \varepsilon a_n, \quad |b_n| = a_n$$

la même égalité (4) montre que les valeurs de $Z = F(z)$ couvrent tout un cercle

$$(6) \qquad |Z - F_n| < k \varepsilon |F_n|,$$

le nombre k étant indépendant de n qui est supposé assez grand.

Supposons que l'on ait choisi les $|b_n|$ de telle façon que les nombres

$$\mu_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{b_1 b_2 \ldots b_n}, \quad |b_n| = a_n,$$

soient denses dans toute couronne

$$(7) \qquad \frac{1}{A} < |\mu_n| < A$$

si grand que soit le nombre donné A. D'après l'égalité (3), les nombres F_n seront aussi denses dans une couronne analogue et d'après (6) la fonction $F(z)$ prendra une infinité de fois toute valeur Z telle que

$$\frac{1}{A} < |Z| < A$$

dans la suite des cercles (5) où ε est arbitrariement petit. La direction φ sera direction de Picard de $F(z)$. La fonction $F(z)$ est méromorphe, mais la fonction

$$f(z) = F(z)\,(1 - e^{iz})$$

est une fonction entière d'après la définition des a_n. Comme φ

est pris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, le second facteur dans l'expression de $f(z)$ est de la forme

$$1+0(1)\, e^{-|z| \sin \varphi}$$

et tout ce qui a été dit pour $F(z)$ vaut pour $f(z)$. Les directions φ comprises entre $\frac{\pi}{2}$ et π sont directions de Picard pour $f(z)$ sans être directions de Julia. La valeur 0 est exceptionnelle. On verra facilement comment on pourra s'arranger pour qu'il n'y ait pas de valeur exceptionnelle, et aussi qu'on peut obtenir des directions de Picard pour une fonction entière qui ne sont pas directions de Picard pour la dérivée.

Il reste à établir que l'on peut choisir les $|b_n|$ pour que les μ_n soient denses dans toute couronne (7). On prendra d'abord

$$|b_n| = a_n \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots, N_1 - 1$$

de sorte que $|\mu_n| = 1$ pour $n < N$ et comme l'argument de μ_n est $-n\omega$, on peut supposer N_1 assez grand pour que l'écart maximum de ces μ_n soit inférieur à un nombre donné η. Prenons alors

$$|b_{N_1}| = a_{N_1}\left(1 + \frac{1}{5}\right),$$

pris de nouveau $|b_n| = a_n$ jusqu'à $n = N_2 - 1$, N_2 étant pris assez grand pour que l'écart maximum des points μ_n obtenus sur le cercle de rayon $\frac{5}{6}$ soit inférieur à η. Nous prenons alors

$$|b_{N_2}| = a_{N_2}\left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

puis de nouveau $|b_n| = a_n$ pour $n = N_2 + 1, \ldots, N_3 - 1, N_3$ étant pris assez grand pour que l'écart des points μ_n obtenus sur le cercle de rayon $\frac{5}{7}$ soit inférieur à η. Et nous continuons ces opérations alternées jusqu'à ce qu'on arrivé à $|\mu_n| = \frac{1}{2}$, obtenu à partir de $n = N_5$. Nous prenons alors

$$|b_{N_6}| = a_{N_6} \frac{1}{1 + \frac{1}{11}}$$

et ainsi de suite, en alternant toujours, jusqu'à obtenir $|\mu_n| = 2$. On recommence alors à faire décroître $|\mu_n|$ jusqu'à $\frac{1}{4}$, puis croître jusqu'à 4, mais en remplaçant dans cette série nouvelle d'opérations η par $\frac{\eta}{2}$. Dans la série suivante, où $|\mu_n|$ variera entre 4 et $\frac{1}{8}$ puis entre $\frac{1}{8}$ et 8, on remplacera $\frac{\eta}{2}$ par $\frac{\eta}{4}$, Et ainsi de suite. Les μ_n seront denses dans la couronne (7), si grand que soit A, même lorsqu'on écarte ceux pour lesquels $|b_n| \neq a_n$.