GENERALITÉS SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES (*)

por GEORGES VALIRON
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

On appelle fonction entière une fonction holomorphe en tout point à distance finie, qui ne se reduit pas à un polynôme. Elle est déterminée par son développement en série entière

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots$$

qui doit converger quel que soit z, ce qui entraîne que l'on doit avoir

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0;$$

c'est une condition nécessaire et suffisante. Weierstrass a étendu à ces fonctions le théorème de la décomposition en facteurs des polynômes. Si la fonction $f(z)$ n'a pas de zéros, c'est une exponentielle $e^{g(z)}$, où $g(z)$ est un polynôme ou une fonction entière. Si $f(z)$ a un nombre fini de zéros, elle est le produit d'un polynôme admettant ces zéros avec le même ordre de multiplicité, et ces zéros seulement, et d'une fonction entière sans zéros, elle est de la forme

$$P(z)\, e^{g(z)}.$$

Lorsque $f(z)$ a une infinité de zéros, ces zéros n'ont aucun point d'accumulation à distance finie, on peut les classer par ordre de modules non décroissants en faisant figurer chaque zéro un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Soit

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots; \qquad |a_{n+1}| \geqq |a_n|, \qquad \lim |a_n| = \infty,$$

la suite de ces zéros non nuls. Si $f(0) = 0$, on peut mettre en facteur dans $f(z)$ une puissance de z, on a

$$f(z) \equiv z^m f_1(z), \quad f_1(0) \neq 0,$$

(*) Primera clase (27 de mayo de 1946) del cursillo sobre *Funciones enteras* dictado en el Instituto de Matemática de la Universidad de Buenos Aires.

ce qui ramène au cas d'une fonction différente de zéro à l'origine. Weierstrass forme une fonction entière admettant les zéros a_n; géneralisant un procédé d'Euler, il prend comme facteur s'annulant pour $z=a_n$, l'expression

$$E(z, a_n, p_n) = \left(1-\frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \cdots + \frac{z^{p_n}}{p_n a_n^{p_n}}},$$

où p_n est un entier dépendant en général de n. L'exposant est formé des p_n premiers termes du développement de $\log\left(1-\frac{z}{a_n}\right)$ (en supposant $\left|\frac{z}{a_n}\right|<1$) de telle sorte que, lorsque $\left|\frac{z}{a_n}\right|$ est inférieur à 1, on peut écrire l'expression sous forme exponentiele et le premier terme dans l'exposant est alors

$$\frac{z^{p_n+1}}{(p_n+1)\,a_n^{p_n+1}}.$$

On en déduit que le produit infini

$$\prod_1^\infty E(z, a_n, p_n)$$

est absolument convergent quel que soit z et définit une fonction entière s'annulant aux points a_n pourvu que la série

$$\Sigma\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}$$

converge quel que soit r. On peut toujours s'arranger pour qu'il en soit ainsi, on pourra prendre par exemple $p_n=n$. (Voir Goursat, II, chap. XV, Valiron I, n°. 209).

On a dans ce cas

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_1^\infty E(z, a_n, p_n).$$

Un cas simple est celui où les p_n peuvent être pris égaux à un nombre fixe et où $g(z)$ est un polynôme, on dit alors avec

Laguerre que la fonction est de genre fini, le genre étant le plus grand des nombres p_n et du degré de $g(z)$ lorsque ces nombres sont pris aussi petits que possible. Poincaré donna des conditions nécessaires que doivent vérifier les coefficients c_n du développement taylorien pour que le genre soit fini; Hadamard donna les réciproques, ce qui lui permit d'étudier une fonction introduit par Riemann et d'obtenir ultérieurement la formule donnant la valeur asymptotique du n-ième nombre premier.

Il est aujourd'hui commode d'introduire la notion d'ordre due à Borel. Soit $M(z)$ le maximum de $|f(re^{i\varphi})|$ lorsque φ varie de 0 à 2π; on écrira aussi $M(r, f)$ lorsqu'on aura à spécifier que cette fonction est relative à $f(z)$. On sait d'après Cauchy qui $M(r)$ est une fonction de z qui croît avec r et qui croît plus vite que toute puissance de r (Goursat, II, XIV; Valiron, I, n°. 184). Borel compare $M(r)$ à e^r, donc $\log M(r)$ à r^k; L'ordre ρ de $f(z)$ est le nombre

$$\rho = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log(\log M(r))}{\log r},$$

il peut être nul, fini positif ou infini. Il ne change pas si l'on ajoute à $f(z)$ une constante ou même un polynôme, ou si $f(0)$ étant nul, on remplace $f(z)$ par $\frac{f(z)}{z}$. Si ρ est fini positif, on a, si petit que soit ε positif

$$M(r) < e^{r^{\rho+\varepsilon}} \qquad \text{pour } r > r_\varepsilon,$$

$$M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}} \qquad \text{pour des } r \text{ aussi grand que l'on veut.}$$

Le nombre des zéros d'une fonction entière s'étudie au moyen de la formule de Jensen. Si $f(0) \neq 0$, on a

$$(1) \quad \log|f(0)| + \sum_1^n \log\frac{r}{|a_j|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi, \quad |a_n| \leqq r < |a_{n+1}|.$$

Cette formule peut s'obtenir par le calcul des résidus (Voir Goursat, II, XIV, ou Valiron I, n°. 207). On peut aussi la déduire de la formule de Cauchy donnant le nombre des zéros d'une fonction holomorphe dans un contour. Si $n(x)$ est le nombre des zéros de $f(z)$ dans le cercle $|z| \leqq x$, on obtient la formule (1) en intégrant de 0 à r la fonction $\dfrac{n(x)}{x}$, on a

$$\sum_{1}^{n} \log \frac{r}{|a_j|} = \int_{0}^{r} \frac{n(x)}{x}\, dx \qquad (f(0) \neq 0),$$

la formule de Jensen s'écrit donc assi

$$(2) \qquad \log |f(0)| + \int_{0}^{r} \frac{n(x)}{x}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \log |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

De la formule de Jensen (1), on déduit l'inégalité de Jensen

$$\frac{|f(0)|\, r^n}{|a_1 a_2 \dots a_n|} < M(r)$$

dans laquelle il n'est plus nécessaire de supposer r compris entre $|a_n|$ et $|a_{n+1}|$, elle a lieu quels que soient r et n. Cette inégalité, ou celle déduite de (2)

$$|f(0)|\, e^{\int_{0}^{r} \frac{n(x)dx}{x}} < M(r),$$

donne une borne de $\dfrac{1}{|a_n|}$ (ou de $n(x)$ dans la seconde inégalité). On en déduit que, si $f(z)$ est d'ordre fini ρ, la série

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}}$$

est convergente pourvu que $\varepsilon > 0$, si petit que soit ε. On peut prendre pour p_n un nombre fixe. Si ρ n'est pas entier, on peut prendre $p_n =$ partie entière de ρ, soit $p = E(\rho)$; si ρ est entier, on peut prendre $p_n = p = \rho$ ou $p_n = p = \rho - 1$ suivant que

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{\rho}}$$

diverge ou converge. Alors

$$(3)\qquad f(z)=e^{g(z)}\prod\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z}{a_n}+\cdots+\frac{z^p}{pa_n^p}}.$$

En particulier, si $\rho<1$, on a

$$(4)\qquad f(z)=e^{g(z)}\prod_1^\infty\left(1-\frac{z}{a_n}\right).$$

Hadamard a montré que $g(z)$ est un polynôme de degré au plus égal à l'ordre ρ. Sa méthode consistait à résoudre l'égalité (3) par rapport à $e^{g(z)}$ et à chercher le minimum de produit canonique du second membre de (3) sur certains cercles $|z|=$const. Il en déduisait une borne du module de l'exponentiele $e^{g(z)}$, donc de la partie reélle de $g(z)$, puis de $|g(z)|$ (Voir Borel, Leçons sur les fonctions entières).

On peut, en utilisant un procédé de Landau (Math. Z, 1926), ne pas recourir au théorème sur le minimum du module. On s'appuyera uniquement sur le théorème sur la partie réelle d'une fonction holomorphe (Voir Valiron I, n°. 184).

Si $g(z)$ est holomorphe pour $|z|<R$, $g(0)=0$, et si la partie réelle de $g(z)$ est inférieure à A dans ce cercle, on a

$$(5)\qquad M(r)=\max|g(re^{i\varphi})|\leqq\frac{2Ar}{R-r},\qquad r<R,$$

l'égalité n'ayant lieu que si $g(z)$ est de la forme

$$\frac{2Ahz}{R+hz},\qquad |h|=1.$$

On le voit en faisant une transformation conforme du plan Z où l'on représente les valeurs de $g(z)$, tels que le demi-plan $\mathcal{R}\,Z<A$ soit représenté sur un cercle de rayon 1 centré à l'origine: on pose donc

$$G(z)=\frac{g(z)}{2A-g(z)}.$$

La fonction $G(z)$ est holomorphe pour $|z|<R$, $G(0)=0$, et son

module est au plus égal à 1. On applique à cette fonction le lemme de Schwarz, ce qui conduit au résultat indiqué.

La formule précise (5) est due à Carathéodory. Si l'on suppose maintenant que $A(r)$ désignant le maximum de la partie réelle d'une fonction entière $g(z)$ pour $|z|=r$, on ait

$$\lim_{r=\infty} \frac{A(r)}{r^k}=0, \qquad k \text{ positif fixe,}$$

la formule (5) montre que $g(z)$ est un polynôme de degré inférieur à k (Valiron, I, n°. 184).

Revenons alors à la démonstration du théorème d'Hadamard. Supposons d'abord l'ordre ρ inférieur à 1. Résolvons la formule (4) par rapport à l'exponentielle et définissons l'entier m par la condition $|a_m|\leqq 2|z|<a_{m+1}$. On peut écrire

$$(6) \qquad e^{g(z)}=\frac{f(z)}{\prod\limits_1^m\left(1-\frac{z}{a_n}\right)} \frac{1}{\prod\limits_{m+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)}.$$

Dans le second facteur du second membre, on a $u=\left|\frac{z}{a_n}\right|<\frac{1}{2}$, et comme dans ces conditions

$$\frac{1}{1-u}<1+2u<e^{2u},$$

le logaritme du module de ce facteur est au plus égal à

$$2\sum_{m+1}^{\infty}\left|\frac{z}{a_n}\right|=2|z|\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{|a_n|}<\varepsilon|z|$$

pourvu que $|z|$, donc m soit assez grand, puisque le série $\sum\frac{1}{|a_n|}$ converge. Le premier terme du second membre de (6) est une fonction entière, le maximum de son module pour $|z|=r$ est inférieur au maximum de ce module pour $|z|=4r$, or pour $|z|=4r$, $\left|\frac{z}{a_n}\right|$ est supérieur ou égal à 2, le dénominateur est plus grand que 1 en module. Par suite

$$|e^{g(z)}| < e^{\varepsilon r} M(4r) < e^{\varepsilon r + r^{\rho}} < e^{\varepsilon' r}$$

puisque $\rho < 1$. Il en découle que $g(z)$ est une constante puisque

$$\lim_{r=\infty} \frac{\mathcal{R} g(z)}{r} = 0.$$

Le théorème d'Hadamard est ainsi démontré pour $\rho < 1$. Dans le cas général, on a la formule (3) avec $p \leqq \rho$ et

$$g(z) = d_0 + d_1 z + \ldots + d_s z^s + \ldots$$

il s'agit de montrer que $d_s = 0$ si $s > \rho$. On introduit la fonction

$$F(z^s) = f(z) f(z\omega) \ldots f(z\omega^{s-1}), \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{s}}$$

$$= e^{s\, d_s z^s + \ldots} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z^s}{a_n{}^s}\right) . f(0)^s.$$

C'est une fonction entière de z^s et on voit que son ordre est au plus $\frac{\rho}{s} < 1$, donc $d_s = 0$. Le théorème d'Hadamard est démontré (Pour plus de détails, Voir Valiron I, n°. 210).

Toute fonction entière $f(z)$ d'ordre fini ρ ayant une infinité de zéros est de la forme

$$f(z) = C z^m e^{Q(z)} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z^p}{p a_n^p}},$$

avec $p \leqq \rho$; $Q(z)$ est un polynôme de degré ρ au plus.

L'ordre se détermine à partir du développement taylorien. Hadamard a donné une méthode qu'il a présentée sous forme géométrique (Bulletin de la Soc. Math., t. 24; voir aussi Borel, Leçons sur les séries à termes positifs). La traduction analytique d'une partie des résultats est souvent utile.

Posons $C_n = |c_n|$, $|z| = r$, la suite des nombres

$$C_0, \; C_1 r, \; \ldots, \; C_n r^n, \; \ldots$$

admet pour chaque r un ou plusieurs termes maxima. Si $\mu(r)$

est la valeur de ces termes, on a, d'après les inégalités de Cauchy,

$$\mu(r) < M(r) \leq \sum_0^\infty C_n r^n.$$

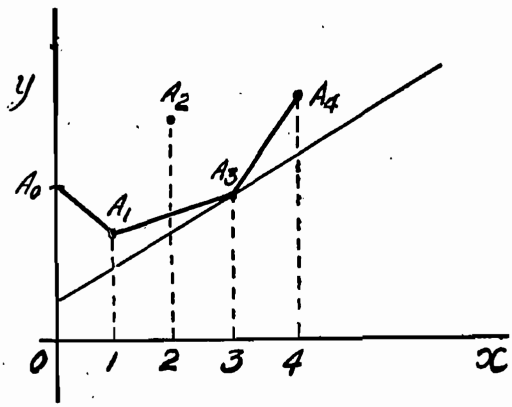
Posons

$$\log C_n = -g_n,$$

on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{g_n}{n} = +\infty$$

puisque $\sqrt[n]{C_n}$ tend vers zéro. Il s'ensuit que, si l'on marque les points A_n de coordonnées n, g_n, on peut, avec ces points, construire un polygone de Newton $\Pi(f)$ convexe vers le bas et laissant les



puints A_n au-dessus ou sur ses côtes, les sommets étant certains des points A_n. Si n est le rang du terme maximum correspondant à $\mu(r)$, on a, pour $m \neq n$,

$$g_m - m \log r \geqq g_n - n \log r,$$

ou

$$g_m \geqq g_n + (m-n) \log r.$$

La droite de pente $\log r$ passant par A_n laisse les autres points A_m au-dessus d'elle (ou sur elle), c'est une «tangente» à $\Pi(f)$.

Soit G_n le point d'abscisse m de $\Pi(f)$; on a $G_m \leqq g_m$, donc

$$W(r) = \sum_0^\infty e^{-G_n} r^n$$

majore $M(r)$; pour toutes les fonctions admettant le même polygone $\Pi(f)$ cette majorante est la même. On peut poser

$$R_n = e^{G_n - G_{n-1}}, \quad n = 0, 1, \ldots, \ (C_0 \neq 0)$$

$\log R_n$ est la pente du côté de $\Pi(f)$ entre les abscisses n et $n-1$, elle ne décroît pas lorsque n croît et tend vers l'infini avec n. Si $\nu(r)$ désigne le rang du terme maximum de plus haut rang correspondant à la valeur r, on a

$$\mu(r) = C_0 \frac{r_{\nu(r)}}{R_1 R_2 \ldots R_{\nu(r)}} \qquad (\text{si } C_0 \neq 0)$$

donc aussi

$$\log \mu(r) = \log C_0 + \int_0^r \frac{\nu(x)}{x} dx.$$

Du point de vue géométrique, log $\mu(r)$ est l'ordonnée à l'origine changée de signe de la tangente à $\Pi(f)$ dont la pente est $\log r$. D'autre part, si $p > \nu(r)$, on peut écrire

$$W(r) = \sum_0^{p-1} e^{-G_n} r^n + \sum_p^{\infty} e^{-G_n} r^n \leq p\,\mu(r) + \mu(r) \sum_{q=p}^{\infty} \left(\frac{r}{R_p}\right)^{q-p+1}$$

à la condition que $R_p > r$. La somme de la série est $\frac{r}{R_p - r}$. On peut prendre

$$p = \nu\left(r + \frac{r}{\nu(r)}\right) + 1$$

donc

$$R_p \geqq r + \frac{r}{\nu(r)}$$

et l'on a finalement, les inégalités

$$\mu(r) \leq M(r) < \mu(r) \left[2\nu\left(r + \frac{r}{\nu(r)}\right) + 1\right]$$

$$\log \mu(r) = \int_0^r \frac{\nu(x)}{x}\, dx.$$

Dans le cas de l'ordre fini ρ, l'inégalité $\mu(r) < M(r)$ analogue à l'inégalité de Jensen donne

$$\nu(x) < x^{\rho+\varepsilon}$$

si petit que soit ε, pourvu que x soit assez grand. On a dans ce cas

$$\mu(r) < M(r) < \mu(r)\, r^{\rho+\varepsilon}$$

et puisque $M(r)$ croît plus vite que toute puissance de r, on a a fortiori

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{\log \mu(r)} = 1.$$

Inversement, si $\nu(x) < x^{\rho+\varepsilon}$ si petit que soit le nombre positif ε, pourvu que x soit assez grand, on aura de suite

$$\log M(r) < k r^{\rho+\varepsilon}$$

k étant fini, l'ordre sera ρ au plus. Donc, pour que l'ordre soit ρ, il faut et il suffit que

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log \nu(r)}{\log r} = \rho.$$

ou, ce qui est la même chose

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\log R_n} = \rho.$$

En passant à $e^{G_n} = R_1 R_2 \ldots R_n$ (si $C_0 = 1$), on obtient

$$e^{G_n} > n^{\frac{n}{\rho+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0,\ n > n_\varepsilon$$

et, il faut et il suffit que, si petit que soit $\varepsilon > 0$, on ait, à partir d'une valeur de n l'inégalité précédente, tandis que pour une pour une suite infinie de n,

$$e^{G_n} < n^{\frac{n}{\rho+\varepsilon}}.$$

finalement, pour que l'ordre soit ρ, el faut et il suffit que

$$|c_n| < \frac{1}{n^{\frac{n}{\rho}(1-\varepsilon)}} \quad \text{si } n > n_\varepsilon,$$

$$|c_n| > \frac{1}{n^{\frac{n}{\rho}(1+\varepsilon)}} \quad \text{pour une suite infinie de } n.$$

Autrement dit, il faut et il suffit que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{-\log|c_n|}{n \log n} = \frac{1}{\rho}.$$

Pour préciser ces inégalités, on a cherché à faire une comparaison plus serrée entre $\log M(r)$ et les puissances de r. On a supposé d'abord que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^\rho (\log r)^{\rho_1} \ldots (\log_q r)^{\rho_1}}$$

èst un nombre fini positif. Mais ceci ne peut pas permettre l'étude de de toute fonction d'ordre fini. On peut introduire l'ordre précisé. C'est une fonction de r, continue, dérivable à gauche et à droite, et telle que

$$\lim_{r=\infty} \rho(r) = \rho, \qquad \lim_{r=\infty} \rho'(r)\, r \log r = 0.$$

A toute fonction d'ordre fini positif ρ correspond une fonction $\rho(r)$, jouissant de ces propriétés et telle que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r^{\rho(r)}} = 1.$$

Pour en obtenir une, il suffit de considérer les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_p, \ldots$ tels que, par exemple,

$$\log M(r_{p+1}) = \left(1 + \frac{1}{p}\right) \log M(r_p)$$

qui sont indéfiniment croissants, d'associer à chaque r_p, la fonction

$$y_p(r) = \frac{\log M(r_p)}{\log r_p} + \log_z r - \log_z r_p \qquad \text{pour } r_1 < r \leqq r_p$$

$$y_p(r) = \frac{\log M(r_p)}{\log r_p} + \log_z r_p - \log_z r \qquad \text{pour } r \geqq r_p$$

et de prendre pour chaque $r \geqq r_1$ le maximum des nombres $y_p(r)$ et d'une fonction constante par intervalles tendant vers ρ par valeurs moindres que ρ et convenablement choisie. On définit ainsi $\rho(r)$ pour $r \geqq r_1$, on la prend constante pour $r < r_1$, r_1 étant par exemple le nombre 25.

Grace à ses propriétés, la fontion $\rho(r)$ permet le calcul asymptotique d'intégrales de la forme

$$\int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x} dx ; \int_{r_0}^{r} \frac{x^{\rho(x)}}{x^{\alpha+1}} dx, \ (0 < \alpha < \rho) ; \quad \int_{r}^{\infty} \frac{x^{\rho(x)}}{x^{\beta}} dx, \ (\beta > \rho + 1)$$

lorsque r croît indéfiniment. Une égalité asymptotique de la forme

$$\int_0^r \frac{\nu(x)}{x} dx \sim r^{\rho(r)} ,$$

où $\nu(x)$ est une fonction non-décroissante, se résout sous la forme

$$\nu(r) \sim \rho r^{\rho(r)} .$$

Il s'ensuit que, si

$$(7) \qquad \log M(r) \sim r^{\rho(r)}$$

on a

(8) $$n \sim \rho R_n{}^{\rho(R_n)} .$$

Si l'on désigne par $y = x^{\omega(x)}$ la fonction inverse de $x = y^{\rho(y)}$, on a

$$\lim_{x=\infty} \omega(x) = \frac{1}{\rho}, \quad \lim_{x=\infty} \omega'(x)\, x \log x = 0;$$

et l'égalité (8) s'écrit

$$R_n \sim \frac{n^{\omega(n)}}{\rho^{\frac{1}{\rho}}}.$$

On passe de R_n à e^{G_n}. Pour que (7) ait lieu, il faut et il suffiit que

$$e^{G_n} \sim \left(\frac{n}{\rho e}\right)^{\omega(n)}$$

Le polygone $\Pi(f)$ sera compris entre deux courbes convexes. On en déduit finalement que pour que (7) ait lieu, il faut et il suffit que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \left\{ \sqrt[n]{|c_n|} \left(\frac{n}{\rho e}\right)^{\omega(n)} \right\} = 1.$$

et que, pour une suite de valeurs n_p telles que $\frac{n_{p+1}}{n_p}$ tende vers 1, on ait

$$\lim_{p=\infty} \left\{ \sqrt[n_p]{|c_{n_p}|} \left(\frac{n_p}{\rho e}\right)^{\omega(n_p)} \right\} = 1.$$

Si l'on suppose seulement que, $\rho(r)$ étant un ordre précisé, on a

$$\log M(r) r > k\, r^{\rho(r)}, \qquad k < 1, \quad r > r_0,$$

on trouve une condition nécessaire et suffisante qui se traduit par le fait que le polygône $\Pi(f)$ est compris entre deux courbes convexes, mais cette condition ne se traduit pas facilement sous forme analytique.