

# IMPULSO ANGULAR DEL CAMPO DE RADIACION

por JOSÉ A. BALSEIRO

Observatorio Astronómico, - Córdoba  
(Entregado el 6 de marzo de 1947)

## Abstract:

The theory of elementary particles permits to attribute a well defined angular momentum expression to a radiation field. Examples are given for the determination of total angular momentum of an electromagnetic field of two photons, and for the interferences characteristic of the Bose-Einstein statistics. Conservation of total angular momentum during an emission process leads to the expressions of intensity distribution of the Zeeman effect in the limit  $H \sim 0$ . In the case of a vector meson field total angular momentum can be split, in a relativistic invariant way, into orbital and spin momentum. The spin thus defined results to be an integral of motion for free particles.

## I. CAMPO ELECTROMAGNÉTICO

### § 1. — *Introducción.*

La teoría general del campo de las partículas elementales permite atribuir un impulso angular total al campo considerado<sup>(1)</sup>. En general, es posible obtener de éste, la división en impulso orbital e impulso de «espín»<sup>(2)</sup>. En particular, tratándose del campo electromagnético se obtiene para el impulso angular total la expresión conocida en la teoría clásica:

$$\vec{J} = \frac{1}{8\pi c} \int \vec{r} \times [\vec{E}^* \times \vec{H} - \vec{H}^* \times \vec{E}] d\tau. \quad (1.1)$$

Si el campo electromagnético se considera cuantificado la (1.1) define el operador de impulso angular total, cuya repre-

(1) W. PAULI, *Rev. of Mod. Phys.* 13, 203 (1941).

(2) F. J. BELINFANTE, *Physica*, 6, 887 (1939).

sentación sobre ejes principales conduce a combinaciones lineales de las funciones propias del campo, similares a las que se obtienen tratándose de partículas de Schrödinger descritas por funciones de onda simétricas. Esta circunstancia hace que aparezcan analogías entre ambos casos, a pesar de la diferencia fundamental que entre ambos existe.

El formalismo da cuenta de la conservación del impulso angular total y es aplicado a ejemplos simples del campo de dos fotones.

§ 2. — *Impulso angular del campo de un fotón.*

Si se considera que un solo fotón está presente en el campo de radiación la (1.1) permite atribuir al impulso angular total la representación matricial:

$$\vec{J}_{ik} = \frac{1}{8\pi c} \int \vec{r} \times [\vec{E}_i^* \times \vec{H}_k - \vec{H}_k^* \times \vec{E}_i] d\tau \quad (2.1)$$

donde  $\vec{E}_i$  y  $\vec{H}_k$  son dos soluciones particulares de las ecuaciones de Maxwell, normalizadas de modo a obtener para la energía el valor  $h\nu$ . Las soluciones adecuadas para nuestro objeto son las soluciones esféricas, eléctricas (E) o magnéticas (M). (Apéndice I, (E) y (M)).

Para un valor dado de  $k = \frac{2\pi\nu}{c}$ , la energía del campo se define por la matriz de elementos. (Apén. I, fórm. (2) y sig.):

$$\begin{aligned} \langle l', m', k' | W | l, m, k \rangle = \frac{1}{8\pi} \int & [\vec{E}_{(k)}^*{}^{*l,m} \vec{E}_{(k')}^{l,m'} + \\ & + \vec{H}_{(k)}^*{}^{*l,m} \vec{H}_{(k')}^{l,m'}] d\tau. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Se consideran las soluciones estacionarias en una esfera de conductividad infinita de radio  $R$ . La continuidad de las componentes tangenciales del campo eléctrico, da como condiciones de límite para (E) y (M) respectivamente:

$$\left[ \frac{d}{dr} \psi_l(kr) \right]_{r=R} = 0 \quad [\psi_l(kr)]_{r=R} = 0. \quad (2.3)$$

De estas relaciones obtienen los valores discretos de  $k$

que corresponden a las ondas propias teniéndose (Apén. I, (3)):

$$(l', m', k' | W | l, m, k) = h\nu \delta_{kk'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2. 2')$$

El cálculo para el espacio libre puede realizarse estableciendo que  $R \rightarrow \infty$  y considerando las soluciones asintóticas de las ecuaciones de campo. El espectro discreto tiende al espectro continuo y la normalización respecto a éste se hace como es habitual:

$$(l', m', k' | W | l, m, k) = \frac{1}{2\Delta k} \int_{k-\Delta k}^{k+\Delta k} (l', m', k' | W | l, m, k) dk'$$

De (2.1) se obtienen los elementos de matriz del impulso angular total. (Apén. (4) y sig.) para el campo de un fotón:

$$(l', m' | J_z | l, m) = \frac{h}{2\pi} m \delta_{ll'} \delta_{m'l'm} \quad (2. 4)$$

$$(l', m' | J_x \pm i J_y | l, m) = \frac{h}{2\pi} \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} \delta_{l'l} \delta_{m'm \mp 1} \quad (2. 4')$$

Los elementos de transición de energía e impulso entre ( $E$ ) y ( $M$ ) son nulos. Estas matrices fueron obtenidas por W. Heitler<sup>(3)</sup> por otro método y son idénticas a las matrices de impulso angular de una partícula de Schrödinger.

Los elementos diagonales de (2.1) fueron dados en la teoría clásica por M. ABRAHAM como valor del impulso angular de una onda dipolar polarizada circularmente:

$$J_x = J_y = 0 \quad J_z = \frac{W}{\nu}$$

### § 3. — Impulso angular del campo de un número arbitrario de fotones.

Los operadores de campo contenidos en (1.1) son:

$$\vec{E} = \sum_k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{(k)}^{l,m} E_{(k)}^{l,m} \quad \vec{H} = \sum_k \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{(k)}^{+l,m} H_{(k)}^{*l,m} \quad (3.1)$$

donde  $a_{(k)}^{l,m}$  y  $a_{(k)}^{+l,m}$  son los operadores de absorción y emisión respectivamente. Teniendo presente que

(3) W. HEITLER, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 32, 112 (1936).

$$a_s^+ a_s = N_s = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \quad \text{y} \quad \sqrt{N_s} e^{i \sum n_s \vartheta_s} = \sqrt{n_s} e^{i \sum n_s \vartheta_s}$$

donde  $n_s$  es el número de fotones de fase  $\vartheta_s$  asociados al estado  $s$ , se obtienen los elementos de matriz del impulso angular del campo:

$$\langle n'_1 n'_2 \dots | \vec{J} | n_1 n_2 \dots \rangle = \int \Gamma_{n'_1 n'_2 \dots}^+ \vec{J} \Gamma_{n_1 n_2 \dots} d\vartheta_1 d\vartheta_2 \dots d\tau$$

siendo  $\Gamma_{n_1 n_2 \dots}$  las funciones propias del operador  $N_s$ :

$$\Gamma_{n_1 n_2 \dots} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N}} e^{i \sum n_s \vartheta_s}$$

Sólamente no se anulan los elementos de matriz que corresponden a un mismo valor de  $k$  y  $l$ . (según (2.4) y (2.4')) y, además, aquéllos que corresponden a la transición de un solo fotón de un estado a otro:

$$\langle n_1 n_2 \dots | J_z | n_1 n_2 \dots \rangle = \frac{\hbar}{2\pi} \sum_{i=1}^N n_i m_i \quad (3.2)$$

$$\langle n_1 \dots n_i \dots n_k \dots | J_x \pm i J_y | n_1 \dots n_i - 1 \dots n_k \dots \rangle = \frac{\hbar}{2\pi} [n_i(n_i + 1) (l \mp m_i) (l \pm m_i + 1)]^{1/2} \quad (3.3)$$

En esta representación el impulso angular total  $|J|^2$  no es diagonal.

#### § 4. — Composición del impulso angular de dos fotones.

Las matrices (3.2) y (3.3) permiten componer el impulso angular de dos fotones, que consideraremos son dipolares ( $l=1$ ) y de frecuencias  $\nu_1$  y  $\nu_2$ . Las configuraciones quedan caracterizadas por  $\nu_1$  y  $\nu_2$  y por los respectivos números cuánticos  $m_1$  y  $m_2$ . Las funciones propias correspondientes a estas configuraciones son:

$$\Gamma_{m_1 m_2}^{\nu_1 \nu_2} = \frac{1}{2\pi} e^{i \sum_{k=1}^2 n_{\nu_k} m_k \vartheta_{\nu_k} m_k} \quad \begin{matrix} n_{\nu_k} m_k = 0, 1, 2 \\ \sum_{k=1}^2 n_{\nu_k} m_k = 2. \end{matrix}$$

Transformando el impulso total sobre ejes principales se obtienen nueve estados diferentes, caracterizados por los números cuánticos del impulso angular total  $L=0, 1, 2$  y  $-L \leq M \leq +L$ :

TABLA 1  
*Funciones propias*

$M =$	2	1	0	-1	-2
$L = 0$			$\frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma_{0,0}^{\nu_1 \nu_2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma_{1,-1}^{\nu_1 \nu_2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \Gamma_{-1,1}^{\nu_1 \nu_2}$		
$L = 1$		$-\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{1,0}^{\nu_1 \nu_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{0,1}^{\nu_1 \nu_2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{1,-1}^{\nu_1 \nu_2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{-1,1}^{\nu_1 \nu_2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{-1,0}^{\nu_1 \nu_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{0,-1}^{\nu_1 \nu_2}$	
$L = 2$	$\Gamma_{2,2}^{\nu_1 \nu_2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{1,0}^{\nu_1 \nu_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{0,1}^{\nu_1 \nu_2}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} \Gamma_{0,0}^{\nu_1 \nu_2} - \frac{1}{\sqrt{6}} \Gamma_{1,-1}^{\nu_1 \nu_2} - \frac{1}{\sqrt{6}} \Gamma_{-1,1}^{\nu_1 \nu_2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{-1,0}^{\nu_1 \nu_2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_{0,-1}^{\nu_1 \nu_2}$	$\Gamma_{2,2}^{\nu_1 \nu_2}$

Estas combinaciones lineales son iguales a las de las funciones propias de dos partículas materiales, descritas por funciones de onda simétricas si en vez de  $\Gamma$  se escribe la función de onda de Schrödinger. Como en el caso de partículas materiales de igual energía, y estadísticas Bose-Einstein, las funciones correspondientes a  $L=1$  desaparecen cuando  $v_1=v_2$ .

Las combinaciones lineales de la Tabla 1, permiten calcular la distribución angular de la intensidad del campo, considerando que ésta es proporcional a:

$$\int \Gamma_{L,M}^{*v_1,v_2}(E^+ E + H^+ H) \Gamma_{L,M}^{v_1,v_2} d\vartheta$$

que, para las distintas configuraciones posibles dan los valores que figuran en la Tabla 2; y son idénticas a las que se obtienen de la teoría clásica superponiendo las ondas dipolares y promediando sobre las fases relativas. Esta observación permite determinar la polarización del campo en cualquier dirección.

TABLA 2

*Distribución angular de intensidad*

$M =$	2	1	0	-1	-2
$L = 0$			$K = \frac{c}{r^2}(v_1+v_2)$		
$L = 1$		$K(1 + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \vartheta)$	$K(1 + \text{cos}^2 \vartheta)$	$K(1 + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \vartheta)$	
$L = 2$	$K(1 + \text{cos}^2 \vartheta)$	$K(1 + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \vartheta)$	$K(\frac{2}{3} + \text{sen}^2 \vartheta)$	$K(1 + \frac{1}{2} \text{sen}^2 \vartheta)$	$K(1 + \text{cos}^2 \vartheta)$

§ 5. — *Interferencias en el campo de dos fotones.*

Tratándose de dos partículas materiales idénticas sin interacción

$$|\psi|^2 = |\psi_1(r_1) \psi_2(r_2) \pm \psi_1(r_2) \psi_2(r_1)|^2$$

da la probabilidad de encontrar una de las partículas en el lugar de coordenadas  $r_1$  y otra en el de  $r_2$ . Aparecen aquí, fenómenos de interferencia, cuya naturaleza depende del carácter de simetría o antisimetría de la función  $\psi$ , además de la configuración que define el estado de las dos partículas.

Nuestro propósito es averiguar si las funciones propias de la Tabla I conducen a fenómenos de interferencias análogos a los que se presentan en el caso mencionado. Existe, sin embargo, una diferencia fundamental entre ambos casos, y es que no se puede, en manera alguna, atribuir a los fotones de un campo coordenadas espaciales como en el caso de partículas. Pero, por otra parte, se puede hablar de la localización de un fotón si se enuncia explícitamente un método de determinación de las coordenadas de un punto material sobre el cual actúa, por ejemplo, un átomo en el que produce efecto fotoeléctrico. La energía del fotoelectrón permite individualizar al fotón absorbido y, el origen de aquél, determinar las coordenadas del átomo.

Consideremos dos fotones de impulso angular dado. La probabilidad que estos dos fotones produzcan simultáneamente procesos fotoeléctricos en dos átomos de coordenadas  $\vec{r}_1$ , y  $\vec{r}_2$ , depende de la posición relativa de éstos últimos, y puede considerarse como una medida de la posición de los dos fotones.

La probabilidad que el fotón  $\nu_1$  sea absorbido por el átomo (1) está dada por el cuadrado del elemento de matriz:

$$H_{\substack{\nu_1 0 \\ \nu_1 \nu_2 \\ \kappa_1 \kappa'_1 \\ \kappa_2 \kappa'_2}} = \iint \Gamma_{L.M}^{*\nu_1 \nu_2} \varphi^*(\kappa'_1) \vec{A} \varphi(\kappa_1) \Gamma_{L.M}^{\nu_1 \nu_2} d\Theta d\tau$$

donde  $\varphi(\kappa_1)$  es la función de onda del átomo (1) en el estado inicial y  $\varphi(\kappa'_1)$  la correspondiente al estado final.  $\vec{A}$  es el operador de campo análogo a (3.1). El elemento de matriz que da la probabilidad que  $\nu_1$  sea absorbido en (1) y  $\nu_2$  en (2) independiente del orden de sucesión en que ésta se realice es:

$$H = H_{\substack{\nu_1 0 \\ \nu_1 \nu_2 \\ \kappa_1 \kappa'_1 \\ \kappa_2 \kappa_2}} H_{\substack{0 0 \\ \nu_2 0 \\ \kappa'_1 \kappa'_1 \\ \kappa_2 \kappa'_2}} + H_{\substack{\nu_1 \nu_2 \\ \kappa_2 0 \\ \kappa_1 \kappa_1 \\ \kappa'_2 \kappa_2}} H_{\substack{\nu_1 0 \\ 0 0 \\ \kappa_1 \kappa'_1 \\ \kappa_2 \kappa'_2}}$$

Si no se especifica por cual de los átomos es absorbido cada fotón hay que completar este elemento de matriz con los dos términos correspondientes a la absorción de  $\nu_1$  por el átomo (2) y  $\nu_2$  por el (1), en un caso, y  $\nu_2$  por (1) y  $\nu_1$  por (2) en el otro.

Consideraremos, como ejemplo, dos fotones en la configuración  $L=1$  y  $M=0$ . Se tiene:

$$|H|^2 = [J_{3/2}(k_1 r_1) J_{3/2}(k_2 r_2) I_1 I_2 - J_{3/2}(k_2 r_1) J_{3/2}(k_1 r_2) I'_1 I'_2]^2$$

$$\frac{K}{\sqrt{r_1 r_2}} [\text{sen}^2 \vartheta_1 \text{sen}^2 \vartheta_2 \text{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos^2 \vartheta_1 + \cos^2 \vartheta_2].$$

$I_i$  son las integrales de las funciones propias de los átomos en los distintos estados. El primer factor muestra fenómenos de interferencias análogos a los que se presentan en el caso de dos partículas materiales que obedecen a la estadística de Bose-Einstein en la misma configuración considerada:

$$|\psi|^2 = [J_{3/2}(k_1 r_1) J_{3/2}(k_2 r_2) - J_{3/2}(k_2 r_1) J_{3/2}(k_1 r_2)]^2$$

$$\frac{K'}{\sqrt{r_1 r_2}} \text{sen}^2 \vartheta_1 \text{sen}^2 \vartheta_2 \text{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Cuando  $\nu_1 = \nu_2$  resulta  $|H|=0$ , debido a que la configuración  $L=1$  y  $M=0$  desaparece, como en el caso de dos partículas de igual energía,  $k_1 = k_2$ .

La distribución angular, resulta, en general, distinta a la de las partículas materiales, y esto se debe a que las soluciones esféricas de las ecuaciones de Maxwell son distintas de las de Schrödinger.

### § 6. — Vinculación con el efecto Zeeman.

Si un proceso de emisión tiene lugar en el espacio libre de un campo exterior es de esperar la conservación del impulso angular total del sistema electrón-fotón. Si se orienta un átomo mediante un campo exterior, con el objeto de tener un impulso angular bien definido, y se retira este campo previamente al

proceso de emisión, para evitar la perturbación que produciría sobre este proceso, el impulso angular del sistema electrón-fotón debe ser igual al impulso angular del electrón en el estado inicial.

Si  $\psi(r, \vartheta, \varphi)$  es la función de onda del electrón en su estado final, el impulso angular del sistema electrón-fotón es:

$$J = \iint \psi^* [r \times p + \frac{1}{8\pi c} [r \times (\vec{E} + \vec{H} - \vec{H} \times \vec{E})]] \psi d\Theta d\tau. \quad (6.1)$$

$$\psi = \psi(r, \vartheta, \varphi) e^{i \sum n_s \vartheta_s}.$$

Si, en particular, consideramos un fotón dipolar y un electrón  $p$  en su estado final, al transformar el impulso angular sobre ejes principales, aparecen combinaciones lineales  $\Phi_{L,M}$  del mismo tipo que las que figuran en la Tabla 1, si se considera, ahora, que  $\Phi$  son las funciones propias del sistema electrón-fotón.

El cuadrado de los coeficientes de las combinaciones lineales que aparecen son los mismos que los que se obtienen de las probabilidades de transición en el efecto Zeeman con un campo exterior que tiende a cero. Consideraremos, como ejemplo, la transición  $p-s$  en un campo exterior que tiende a anularse; en estas circunstancias, la transición es expresable por la superposición de las transiciones  $l=1, m=1, 0, 1$  a  $l=0; m=0$ . La probabilidad de una transición que produce una línea polarizada en el sentido y dirección de los ejes  $z, x$  o  $y$  ( $z$  dirección del campo magnético) es proporcional al cuadrado de los elementos de matriz:

$$z_{n' l+1 m}^{n' l+1 m} = \left[ \frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+3)(2l+1)} \right]^{1/2} R_{n' l+1}^{n' l+1}$$

$$x_{n' l+1, m+1}^{n' l+1, m+1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(l+m+2)(l+m+1)}{(2l+3)(2l+1)} \right]^{1/2} R_{n' l+1}^{n' l+1}$$

$$y_{n' l+1, m+1}^{n' l+1, m+1} = -\frac{i}{2} \left[ \frac{(l+m+2)(l+m+1)}{(2l+3)(2l+1)} \right]^{1/2} R_{n' l+1}^{n' l+1}$$

$$x_{n' l+1, m-1}^{n' l+1, m-1} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+3)(2l+1)} \right]^{1/2} R_{n' l+1}^{n' l+1}$$

$$y_n^{n' l+1 m-1} = \frac{i}{2} \left[ \frac{(l-m+2)(l-m+1)}{(2l+3)(2l+1)} \right]^{1/2} R_n^{n' l+1}$$

donde  $R_n^{n' l+1} = \int_0^\infty R_{n'l+1} R_{nl} r^3 dr$  es la integral de la parte radial de las funciones propias del átomo de hidrógeno<sup>(4)</sup>.

Las probabilidades de transición que dan una línea polarizada según las tres direcciones posibles, en el caso considerado, son proporcionales a:

$$|x_n^{n' 11 0}|^2 + |x_n^{n' 1 0 -1}|^2 = \frac{1}{3} R_n^{n' 1}$$

$$|y_n^{n' 11 0}|^2 + |y_n^{n' 1 0 -1}|^2 = \frac{1}{3} R_n^{n' 1}$$

$$|z_n^{n' 10 10}|^2 = \frac{1}{3} R_n^{n' 1}$$

La probabilidad de transición cuando el campo exterior tiende a cero está dada por la superposición de las anteriores. Los coeficientes que en ella aparecen son los cuadrados de los que intervienen en la función propia que describe el sistema electrón-fotón en la configuración  $L=0, M=0$  (Tabla 1, donde se sustituye  $\Gamma_{L,M}$  por  $\Phi_{L,M}$ ).

Por otra parte, si el campo exterior permanece finito, se puede determinar en el estado final, independientemente el impulso angular del electrón y del fotón, en tanto que el impulso angular total del sistema, no está sobre ejes principales, debido a la influencia del campo exterior. El hecho es análogo al efecto Paschen-Back, pudiéndose esperar que, en nuestro caso, se mantenga la conservación del impulso angular con un campo suficientemente débil, cuya intensidad puede estimarse por la energía de acoplamiento entre los impulsos angulares del electrón y del fotón. Esta energía de acoplamiento puede calcularse mediante la energía de perturbación de segundo orden  $E^{(2)}$  que éste último ejerce sobre el primero, pudiéndose, así, hallar la

(4) Ver p. e. H. BETHE, *Hand. der Physik*, 24, 1 pág. 432. Berlín, 1933.

intensidad del campo magnético que produciría una perturbación equivalente.

Sea  $|E|^2$  la intensidad del campo eléctrico de un dipolo en la región  $r \leq \frac{\lambda}{2\pi}$ . Resulta:

$$E^{(2)} = \frac{e^2 k^2}{h\nu} |E|^2.$$

Para un fotón dipolar contenido en una esfera de radio  $R = c\tau$  ( $\tau$ , tiempo de transición),

$$|E|^2 = \frac{hc}{2\pi} \frac{k^3}{R}.$$

La intensidad del campo magnético que produce una perturbación equivalente, dada por la relación:

$$E^{(2)} = \Delta w = \frac{eh}{4mc} H_c.$$

resulta del orden de  $H_c \cong 10^{-5}$  Gauss. Campos mayores destruyen el acoplamiento de los impulsos angulares.

### § 7. — *Espín, atribuible al fotón.*

No existe inconveniente formal de obtener para el campo electromagnético, siguiendo el formalismo general, la división del impulso angular total en impulso orbital e impulso de espín<sup>(2)</sup>:

$$\vec{J} = \frac{1}{8\pi c} \int \sum_{s=1}^3 [E_s^* (\vec{r} \times \text{grad}) A_s + \text{conj}] d\tau + \frac{1}{8\pi c} \int [\vec{E}^* \times \vec{A} + \text{conj}] d\tau. \quad (7.1)$$

Hay que tener presente, sin embargo, que para el campo de radiación electromagnético no es posible, en manera alguna, definir la densidad de cuantos de luz, por lo que tampoco es posible introducir un operador que contenga las coordenadas

locales de los cuantos. De ahí la dificultad de definir el espín para fotones. Existe, además otro inconveniente destacado por L. Rosenfeld<sup>(5)</sup> y es el de no ser los términos de la separación (7.1) invariantes de medida.

Las razones aducidas en Parte II, § 10 conducen a la separación:

$$\begin{aligned} \vec{J} = & \frac{1}{8\pi c} \int \sum_{s=1}^4 \left[ \frac{\partial A^*}{\partial x_0} (\vec{r} \times \text{grad}) A_s + \text{conj} \right] d\tau + \\ & + \frac{1}{8\pi c} \int [\vec{E}^* \times \vec{A} - \vec{H} A_0 + \text{conj}] d\tau. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Mediante la transformación de medida:

$$\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \text{grad } \varphi \\ A'_0 &= A_0 - \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} \end{aligned}$$

el término correspondiente al impulso de espín se transforma

$$\vec{S}' = \vec{S} + \int [H^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_0} - \varphi \frac{\partial H^*}{\partial x_0} + \text{conj}] d\tau.$$

La integral no se anula, en general, por lo cual, en esta representación, tampoco  $\vec{S}$  puede ser introducida como una magnitud inherente al campo de radiación electromagnético.

#### APÉNDICE I

Las soluciones esféricas de las ecuaciones de Maxwell se expresan<sup>(6)</sup>:

$$\vec{\mathcal{E}}_{(k)}^{lm} = \vec{E}_{(k)}^{lm} e^{ikct} \quad \vec{\mathcal{H}}_{(k)}^{lm} = \vec{H}_{(k)}^{lm} e^{ikct} \quad k = \frac{2\pi\nu}{c}$$

<sup>(5)</sup> L. ROSENFELD, *Acad. Roy. Belg. (Cl. Sc.)* 18, 562, (1942).

<sup>(6)</sup> Ver. p. e. M. BORN, *Optik, Julius Springer*, Berlín 1933, pág. 278.

Ondas eléctricas,

(E)

$$E_r^{l,m} = C_{l,m} \frac{l(l+1)}{r^2} \varphi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad H_r^{l,m} = 0$$

$$E_\vartheta^{l,m} = C_{l,m} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \varphi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$H_\vartheta^{l,m} = -C_{l,m} \frac{km}{r \operatorname{sen} \vartheta} \varphi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$E_\varphi^{l,m} = C_{l,m} \frac{im}{r \operatorname{sen} \vartheta} \frac{d}{dr} \varphi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$H_\varphi^{l,m} = -C_{l,m} \frac{ik}{r} \varphi_l(kr) \frac{d}{d\vartheta} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Ondas magnéticas,

(M)

$$E_r^{l,m} = 0 \quad H_r^{l,m} = C_{l,m} \frac{l(l+1)}{r^2} \varphi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$E_\vartheta^{l,m} = C_{l,m} \frac{km}{r \operatorname{sen} \vartheta} \varphi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$H_\vartheta^{l,m} = \frac{C_{l,m}}{r} \frac{d}{dr} \varphi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$E_\varphi^{l,m} = C_{l,m} \frac{ik}{r} \varphi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

$$H_\varphi^{l,m} = C_{l,m} \frac{im}{r \operatorname{sen} \vartheta} \frac{d}{dr} \varphi_l(kr) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}$$

Con:

$$\varphi_l(kr) = \sqrt{kr} J_{l+1/2}(kr)$$

$$C_{l,m} = \left[ \frac{kc(2l+1)(l-m)!}{\pi kc l(l+1)(l+m)!} \right]^{1/2}$$

Para las ondas (E) los elementos de matriz de la energía (2.2) se calculan:

$$\begin{aligned}
 \langle l', m', k' | W | l, m, k \rangle = & \frac{1}{8\pi} C_{l', m'} C_{l, m} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \left\{ \frac{l'(l'+1)l(l+1)}{r^4} \right. \\
 & \psi_l \psi_{l'} P_{l', m'} P_l^m + \frac{1}{r^2} \left( \frac{d\psi_{l'}}{dr} \frac{d\psi_l}{dr} + k^2 \psi_{l'} \psi_l \right) \times \left[ \frac{mm'}{\sin \vartheta} P_{l', m'} P_l^m + \right. \\
 & \left. \left. + \sin^2 \vartheta \frac{dP_{l', m'}}{d\vartheta} \times \frac{dP_l^m}{d\vartheta} \right] \right\} e^{i(m-m')\varphi} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \quad (2)
 \end{aligned}$$

La expresión entre corchetes se transforma, mediante integración por partes y empleando la ecuación diferencial de las funciones  $P_l^m(\cos \vartheta)$  en:

$$l(l+1) \int_0^{2\pi} \sin \vartheta P_l^m P_l^m d\vartheta = l(l+1) \frac{2}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{l'l}$$

con lo cual se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle l', m', k' | W | l, m, k \rangle = & \frac{1}{8\pi} C_{l', m'}^2 4\pi \frac{l(l+1)}{(2l+1)} \times \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{m'm} \delta_{l'l} \\
 & \int_0^R \left\{ \left( \frac{d\psi_l}{dr} \right)^2 + \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right) \psi_l^2 \right\} d\tau.
 \end{aligned}$$

Teniendo presente la relación:

$$\frac{d}{dr} J_{l+1/2}(kr) = -\frac{l+1/2}{r} J_{l+1/2}(kr) + k J_{l+1/2}(kr)$$

y la aproximación asintótica

$$J_{l+1/2}(kR) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{kR}} \sin \left( kR - \frac{l\pi}{2} \right)$$

se obtiene, con el valor asignado a  $C_{l,m}$  la (2.2'). De (2.3) se calculan los valores  $k_n$ . Conocidos éstos se tiene:

$$\int_0^R r J_{l+1/2}(k_n r) J_{l+1/2}(k_n' r) dr = \left[ \frac{d}{dr} J_{l+1/2}(k_n r) \right]_{r=R} \delta_{k_n k_n'}$$

Las componentes de (2.1) son:

$$\begin{aligned} \langle l' m' | J_z | l, m \rangle = \frac{1}{8\pi c} \int [r \operatorname{sen} \vartheta E_r^{l,m} H_\vartheta^{*l,m'} + \\ + \operatorname{conj}] r^2 \operatorname{sen} \vartheta dr d\vartheta d\varphi \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle l' m' | J_x \pm i J_y | l, m \rangle = \frac{1}{8\pi c} \int [-i r E_r^{l,m} H_\varphi^{*l,m'} - \\ - r \cos \vartheta E_r^{l,m} H_\vartheta^{*l,m'}] e^{\pm i\varphi} + \operatorname{conj} d\tau. \end{aligned} \quad (5)$$

La primera, teniendo presente (E) da directamente (2.4). La (5) se calcula considerando la relación:

$$\int_0^{2\pi} [m \cos \vartheta P_l^m P_l^{m'} + P_l^m \frac{d}{d\vartheta} P_l^{m'}] d\vartheta = \int_0^{2\pi} P_l^m P_l^{m'+1} \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta$$

y solo no se anulan los elementos de matriz para los cuales  $l' = l$  y  $m = m' + 1$ .

El Cap. II. *Campo mesotrónico vectorial* aparecerá en el número próximo.