UN VALOR MEDIO INTEGRAL DE LA CARACTERISTICA DE EULER PARA OVALOS MOVILES

por H. Hadwiger
(Berna, Suiza)

La característica de Euler de un conjunto

$$A = K_1 + K_2 + \ldots + K_n, \tag{1}$$

formado por la suma de un número finito de conjuntos planos convexos, cerrados y limitados K_ν, o sea,

$$\varphi(A) = \rho_e - \rho_i \tag{2}$$

(ρ_e = número de contornos exteriores de A; ρ_i = número de contornos interiores de A), puede expresarse por la fórmula simbólica

$$\varphi(A) = 1 - (1-K_1)(1-K_2)\ldots(1-K_n). \tag{3}$$

La interpretación de esta fórmula simbólica es la siguiente: se desarrolla algebraicamente el producto del segundo miembro de (3) y cada producto de la forma

$$K_\nu K_\mu \ldots K_\lambda = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \tag{4}$$

se pone igual a 1 o a 0, según que los conjuntos que lo constituyen tengan o no punto común.

Con este convenio, la validez de (3) se puede probar por inducción completa, teniendo en cuenta la relación funcional

$$\varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A+B) + \varphi(AB) \tag{5}$$

que se sabe cumple la característica de Euler.

La fórmula simbólica (3) puede ser utilizada con ventaja para la solución de ciertos problemas y la convención (4) se presta para ciertas cuestiones de geometría integral, como veremos en la que vamos a tratar.

Consideremos n óvalos

$$K_1, K_2, \ldots, K_n \tag{6}$$

móviles libremente en el plano, los cuales deben cortar a otro óvalo fijo K_0, o sea,

$$K_0 K_\nu = 1, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Para cada posición de los óvalos K_ν, consideremos la suma

$$K_0 K_1 + K_0 K_2 + \ldots + K_0 K_n \tag{8}$$

de sus intersecciones con K_0 y en particular la característica de Euler de esta suma (fig. 1),

$$\Delta = \varphi(K_0K_1 + K_0K_2 + \ldots + K_0K_n). \tag{9}$$

Formemos entonces el *valor medio* de Δ para todas las posiciones de las K_ν, o sea,

$$\overline{\Delta} = \frac{\int \Delta dK_1 \, dK_2 \ldots dK_n}{\int dK_1 \, dK_2 \ldots dK_n} \tag{10}$$

y veamos de calcular este valor medio.

Si ξ_ν, η_ν son las coordenadas de un punto P_ν de K_ν y ϑ_ν el ángulo de giro de K_ν alrededor de P_ν, la expresión

$$dK_\nu = d\xi_\nu \, d\eta_\nu \, d\vartheta_\nu \tag{11}$$

es la llamada densidad cinemática de la geometría integral.

El valor medio (10), se puede expresar fácilmente teniendo en cuenta (3) y la convención (4). En efecto, se tiene

$$\Delta = 1 - (1 - K_0K_1)(1 - K_0K_2) \ldots (1 - K_0K_n) \tag{12}$$

y por tanto

$$\overline{\Delta}=1-\frac{\int(1-K_0K_1)\ldots(1-K_0K_n)\,dK_1\ldots dK_n}{\int dK_1\ldots dK_n} \tag{13}$$

o sea, desarrollando,

$$\overline{\Delta}=1-\{1-\sum_{\nu}\frac{\int K_0K_\nu dK_\nu}{\int dK_\nu}+\sum_{\nu,\mu}\frac{\int K_0K_\nu K_\mu dK_\nu\, dK_\mu}{\int dK_\nu\, dK_\mu}-\ldots\}. \tag{14}$$

En esta expresión la primera sumatoria está extendida a todos los valores $\nu=1,2,\ldots,n$; la segunda a todos los pares $\nu,\mu=1,2;1,3;\ldots,(n-1),n$, etcétera.

Para considerar un caso en que la fórmula (14) toma una forma simple, supongamos que todos los K_i sean congruentes entre sí, o sea,

$$K_1=K_2=\ldots=K_n \;(=K). \tag{15}$$

Entonces se tiene

$$\overline{\Delta}=1-\{1-\binom{n}{1}\frac{\int K_0K_1dK_1}{\int dK_1}+\binom{n}{2}\frac{\int K_0K_1K_2dK_1dK_2}{\int dK_1dK_2}-\ldots\}. \tag{16}$$

Indiquemos por F y L el área y longitud respectivamente de todas las K móviles y por F_0, L_0 el área y longitud de K_0.

Según la fórmula fundamental de geometría integral de L. A. Santaló [1], es

$$\int dK_1\, dK_2\ldots dK_\lambda=(LL_0+2\pi F+2\pi F_0)^\lambda \tag{17}$$

y según una fórmula de W. Blaschke [2]

$$\int K_0\, K_1\ldots K_\lambda\, dK_1\, dK_2\ldots dK_\lambda=(2\pi)^{\lambda-1}(2\pi F^\lambda+2\pi\lambda F^{\lambda-1}F_0+$$
$$+\lambda F^{\lambda-1}LL_0+\binom{\lambda}{2}F^{\lambda-2}F_0L^2). \tag{18}$$

Introduciendo, por comodidad, la notación

$$\omega=\frac{2\pi F}{LL_0+2\pi F+2\pi F_0} \tag{19}$$

---

[1] W. BLASCKE, *Vorlesungen über Integralgeometrie*, Hamburger Mathemastiche Einzelschriften *20*, 1936, pág. 30.

[2] W. BLASCHKE, *loc. cit.*, pág. 53.

la expresión (16) del valor medio se escribe

$$\overline{\Delta}=1-\Big(\sum_0^n(-1)^\lambda \binom{n}{\lambda}\omega^\lambda+\frac{LL_0+2\pi F_0}{2\pi F}\sum_0^n(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}\lambda\omega^\lambda$$

$$+\frac{L^2F_0}{4\pi F^2}\sum_0^n(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}\lambda(\lambda-1)\omega^\lambda\Big). \quad (20)$$

Observando que es

$$\sum_0^n(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}\omega^\lambda=(1-\omega)^n$$

$$\sum_0^n(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}\lambda\omega^\lambda=-n\omega\,(1-\omega)^{n-1}$$

$$\sum_0^n(-1)^\lambda\binom{n}{\lambda}\lambda(\lambda-1)\,\omega^\lambda=n(n-1)\,\omega^2(1-\omega)^{n-2}$$

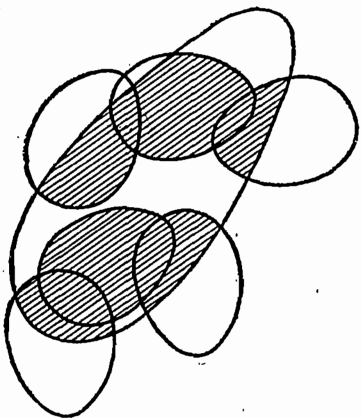

Fig. 1

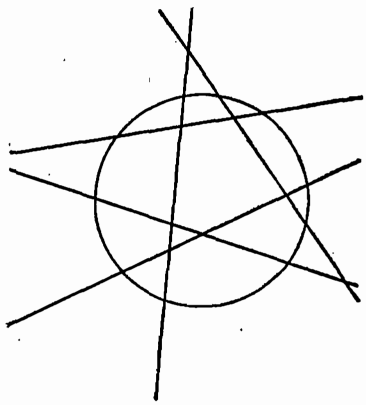

Fig. 2

se puede escribir, en primer lugar,

$$\overline{\Delta}=1-\Big\{(1-\omega)^2-n\,\frac{LL_0+2\pi F_0}{2\pi F}\,\omega(1-\omega)$$

$$+n(n-1)\,\frac{L^2F_0}{4\pi F^2}\,\omega^2\Big\}\,(1-\omega)^{n-2}$$

o bien, sustituyendo en lugar de ω nuevamente su valor (19) y después de algunas simplificaciones, queda la fórmula final

$$\bar{\Delta}=1+(n-1)\left(1-\frac{n\pi F_0L^2}{(LL_0+2\pi F_0)^2}\right)\left(\frac{LL_0+2\pi F_0}{LL_0+2\pi F+2\pi F_0}\right). \quad (21)$$

Se puede, por tanto, enunciar:

El valor medio de la característica de Euler de la intersección de un óvalo K_0 con la suma de n óvalos congruentes K está dado por (21). El valor medio se entiende obtenido al considerar todas las posiciones de los óvalos K en las cuales cortan a K_0.

Vamos a considerar algunos casos particulares de la fórmula (21).

I. Para $n=0$ (caso trivial) es $\bar{\Delta}=0$.

II. Para $n=1$ (caso trivial) es $\bar{\Delta}=1$.

III, Para $n=2$, la fórmula se escribe

$$\bar{\Delta}=1+\frac{(LL_0+2\pi F_0)^2-2\pi F_0L^2}{(LL_0+2\pi F+2\pi F_0)^2}. \quad (22)$$

Indicando por W la probabilidad geométrica de que los dos óvalos K se corten en el interior de K_0, siendo $\bar{\Delta}=W+2(1-W)$, de (22) se deduce

$$W=\frac{8\pi^2FF_0+4\pi^2F^2+2\pi F_0L^2+4\pi FLL_0}{(LL_0+2\pi F+2\pi F_0)^2}. \quad (23)$$

Este resultado es un caso especial de otro mucho más general obtenido por L. A. Santaló [3].

IV. Sea $F>0$ y consideremos que n crece ilimitadamente. Se obtiene el resultado, bastante natural, de ser

$$\bar{\Delta}\to 1 \quad \text{para } n\to\infty. \quad (24)$$

Este resultado indica que en el caso de ser $F>0$, la probabilidad W_n de que n óvalos congruentes K cubran totalmente al óvalo K_0, tiende a 1 para n tendiendo a infinito. El valor explícito de W_n parece ser, sin embargo, bastante complicado.

V. Sea $F=0$, $L=\infty$. Corresponde al caso en que en lugar

(3) L. A. SANTALÓ, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, vol. *11*, pág. 233.

de óvalos K se tienen *rectas* que cortan a K_0. Por paso al límite se deduce de (21),

$$\overline{\Delta}=n-\frac{2\pi F_0}{L_0^2}\binom{n}{2}. \tag{25}$$

Por n rectas dadas en posición general, se sabe que el plano queda dividido en $1+n+\binom{n}{2}$ regiones diferentes (4), de las cuales hay 2n ilimitadas, quedando $1-n+\binom{n}{2}$ regiones limitadas (fig. 2).

Indiquemos con $\varkappa_i$ el número de estos recintos limitados que quedan completamente en el interior de K_0. Si Δ es la característica de Euler del conjunto de las cuerdas que K_0 determina sobre las rectas, evidentemente es $\varkappa_i \geqq 1-\Delta$.

Por otra parte es $\varkappa_i \leqq \varkappa$, siendo $\varkappa$ el número de recintos en que K_0 queda dividido por las n rectas. L. A. Santaló ha determinado el valor medio de $\varkappa$ (5), con lo cual las desigualdades anteriores se traducen en las siguientes

$$1-n+\frac{2\pi F_0}{L_0^2}\binom{n}{2} \leqq \overline{\varkappa}_i \leqq 1+n+\frac{2\pi F_0}{L_0^2}\binom{n}{2}. \tag{26}$$

VI. Sea $F_0=0$, $L_0=2s$. Corresponde al caso de un segmento de longitud s cortado por n óvalos congruentes K.

En este caso $\overline{\Delta}$ es el valor medio del número de cuerdas separadas en que queda dividido el segmento por los n óvalos K (fig. 3). Se tiene, según (21),

$$\overline{\Delta}=1+(n-1)\left(\frac{Ls}{Ls+\pi F}\right)^n. \tag{27}$$

---

(4) Ver por ej. E. Steinitz, Vorlesungen über die Theorie der Polyeder, Berlín 1934, pág. 274.

(5) L. A. Santaló, *Valor medio del número de partes en que una figura convexa es dividida por* n *rectas arbitrarias*, Revista de la U. Matemática Argentina, vol. VII, 1940-41. También para el espacio el problema análogo ha sido resuelto por L. A. Santaló, Rev. Unión Mat. Arg., vol. X, 1945.

VII. Sea $F_0 = \pi R^2$, $L_0 = 2\pi R$, $F = \pi$, $L = 2\pi$. Corresponde al caso de n círculos de radio unidad que cortan a un círculo de radio R (fig. 4).

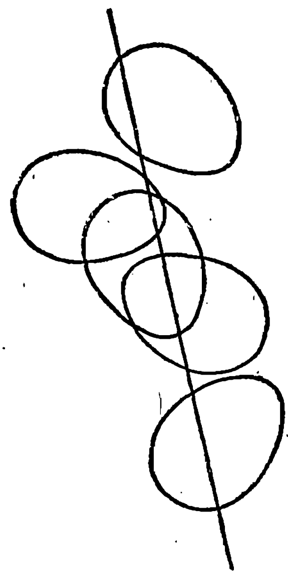

Fig. 3

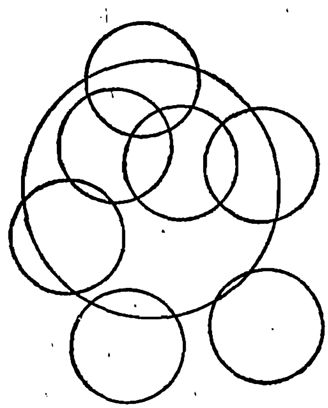

Fig. 4

Sustituyendo los valores correspondientes resulta:

$$\bar{\Delta} = 1 + (n-1)\left(1 - \frac{n}{(R+2)^2}\right)\left(\frac{R(R+2)}{(R+1)^2}\right)^n. \qquad (28)$$

Observemos todavía la relación asintótica:

$$\frac{\bar{\Delta}}{n} \sim e^{-\sigma}(1-\sigma) \qquad (29)$$

siendo $\sigma = n/R^2$, que corresponde al caso del plano cubierto por infinitos círculos de radio unidad, distribuídos arbitrariamente.