UNION MATEMATICA ARGENTINA

COMUNICACIONES

ON THE REPRESENTATION OF COMPLETE BOOLEAN ALGEBRAS (*)
(Abstract)

by LEOPOLDO NACHBIN

By a C-boolean algebra, where C is an infinite cardinal mumber, we mean a boolean algebra such that every family, whose power is $< C$, of elements in the algebra has a supremum and an infimum; and by a C-field of sets we mean a set of sub-sets of a fundamental set which contains the sum and intersection if any family, having power $< C$, of sets in the field, and also the complement of a set in the field. When $C = C_0$ (the power of a countable infinite set), a celebrated theorem due to M. H. Stone (1) states that every boolean algebra is isomorphic to at least a field of sets. One may ask whether this result remains true for $C > C_0$. Considerer the set M of all Lebesgue measurable sets of the straight line and let R be the usual equivalence relation between sets X and Y in M defined by the fact that $X - Y$ and $Y - X$ have measure zero: it is well known that we can make the quotient space M/R into a complete boolean algebra in a natural way, and it can be proved that the algebra so obtained is isomorphic to no C-field of sets for $C > C_0$. Let us say that a sub-set of a C-boolean algebra is a *C-ideal* when the first element of the algebra belongs to the ideal, the last element does not, and the supremum of any family, whose power is $< C$, of elements in the ideal also belongs to the ideal. A *maximal* C-ideal is a C-ideal not properly contained in another C-ideal. Then a C-boolean algebra is isomorphic to at least a C-field of sets if and only if every element different from the last element belongs to some maximal C-ideal. In the case of M/R there is no maximal C-ideal for $C > C_0$, and this fact implies the impossibility of the concrete representation just referred to.

ON LOCALLY CONVEX TOPOLOGICAL VECTOR LATTICES (**)
(Abstract)

by LEOPOLDO NACHBIN

By a *pseudo-normed vector lattice* we mean a vector lattice E (1) provided with a family $\{ p_r \}$ if pseudo-norms (that is, non-negative real functions such that $p_r(x+y) \leq p_r(x) + p_r(y)$, $p_r(-x) = p_r(x)$ and $p_r(ax) = ap_r(x)$, whe-

(*) Récibido para la sesión del 12 de julio de 1947 de la UMA.
(1) M. H. STONE, *The theory of representation for boolean algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. v. 40, pp. 37-111, 1936; G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 1940.
(**) Recibido para la sesión del 12 de julio de 1947 de la UMA.
(1) G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, chap. 7, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1940.

re x, y belong to E and $a \geq 0$ is a real scalar) such that $|x| \leq |y|$ implies $p_r(x) \leq p_r(y)$, $|x| = \sup(x, -x)$ and $|y| = \sup(y, -y)$ being the absolutes of x and y. If we define a topology in E by means of these pseudo-norms in the usual way ([2]) we get a set E which is a *locally convex topological vector lattice* that is, a locally convex topological vector space and at the same time a vector lattice such that the operations of taking supremum and infimum of two elements are uniformly continuous; and conversely every such a system may be obtained from a pseudo-normed vector lattice in this way. In the preceding result we cannot replace the condition of uniform continuity by the simple continuity, as can be shown by the following example. Let E be the set of all real sequences $x = \{x_n\}$ of bounded variation $p(x) = |x_1| + \Sigma_1^\infty |x_{n+1} - x_n| < +\infty$, with sum $x + y = \{x_n + y_n\}$, scalar multiplication $ax = \{ax_n\}$, norm $p(x)$ and ordering $x \leq y$ defined by $x_n \leq y_n$. Then E is a Banach space (ann therefore a locally convex topological vector space) and a vector lattice: the operations of supremum and infimum of two elements are continuous in the topology, but they are not uniformly continuous.

([2]) J. Dieudonné, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques*, Ann. Ecole Norm. Sup., t. 59, pp: 107-139, 1942.

ESTADO ACTUAL DEL PROBLEMA DEL TERCERO EXCLUSO (**)

por Gregorio Klimovsky

En esta comunicación no se exponen resultados originales, sino que sólo se pretende resumir ciertas investigaciones contemporáneas, extrayendo de ellas conclusiones que responden a la siguiente pregunta: ¿Qué valor tiene el problema del tercero excluído en la matemática actual? En especial, y teniendo en cuenta que en el terreno epistemológico el problema del citado principio tiene tanta envergadura como los suscitados por otros principios, como el de contradicción, p. ej., y teniendo en cuenta que no se trata de entrar en una discusión de filosofía pura, el problema nodal que aquí se planteará es el siguiente: *¿Existen razones especiales de orden matemático contra la vigencia del principio de tercero excluso?*

El problema admite discusión en los siguientes aspectos:

1) *El principio considerado como postulado en un formalismo especial.*
2) *Valor sintáctico del principio.*
3) *Valor semántico del principio.*
4) *Valor semántico-lógico del principio.*
5) *El principio en la interpretación de los sistemas formales.*
6) *Problema epistemológico.*

La tesis de la comunicación es que el matemático no tiene por qué preocuparse por el lado semántico del problema, y que en la faz formal se confunde con el problema de la "independencia" y la "completicidad". Por consiguiente,

(**) Resumen de la comunicación hecha en la sesión del 12 de julio de 1947 de la UMA.

sostenemos que *no hay razones de orden matemático para creer en la no-vigencia del principio.*

La comunicación se completa informando acerca de la faz epistemológica, sosteniéndose que el principio de marras es el que permite definir "sentido científico" en un análisis dado.

APÉNDICE: El estado actual del problema del infinito. Sus relaciones con el principio del tercero excluso.

SEMIGRUPOS POSITIVOS Y (l)-IDEALES DE RIESZ-BIRKHOFF (*)

por M. COTLAR y E. ZARANTONELLO

1. — Un semigrupo es un conjunto S en el que está definida una operación de *suma* $a+b$, tal que: 1) ella es asociativa y conmutativa, 2) $f+h=g+h$ implica $f=g$, 3) existe un elemento cero: $f+0=f$. Si los elementos de S admiten la multiplicación por escalares λ reales. se dice que S es semigrupo vectorial. Decimos que S es un semigrupo *positivo* si además: 4) $f+g=0$ implica $f=g=0$. Todo semigrupo es suma directa de un semigrupo positivo y de un grupo.

2. — La operación de suma define en S un *orden natural*: $f \leq g$ si existe h tal que $f+h=g$. Clasificamos los semigrupos positivos en (l)-semigrupos, $(\sigma-l)$-semigrupos y $(v-l)$-semigrupos, según que respecto de dicho orden natural sea S un lattice, σ-laticce o laticce completo y examinaremos la relación entre (l)-semigrupos y (l)-grupos.

3. — Decimos que S es *regular* si $f \leq g+h$, f disjunto con S, implica $f \leq h$, y probamos que tales semigrupos son más generales que los "dominios de Riesz". Damos varias formas equivalentes de regularidad y demostramos que los $(v-l)$-semigrupos pueden caracterizarse como un semigrupo regular en que la suma existe para un número infinito de sumandos.

4. — Un subsemigrupo $S_1 \subset S$ se dice *característico* si $f \leq g$ en S implica $f \leq g$ en S_1. Clifford probó que la condición necesaria y suficiente para que S sea isomorfo a un subsemigrupo característico de un $(v-l)$-semigrupo es que el orden natural de S sea "arquimedeano". Introduciendo una condición "casi arquimedeana" probamos que esta última condición caracteriza a los subsemigrupos de un $(v-l)$-semigrupo, no necesariamente característicos.

5. — Si S es un $(v-l)$-semigrupo, decimos que una noción de orden $f \leq\leq g$, definida en S, es *subordinada* al orden natural $f \leq g$ de S, si $f_i \leq\leq f$ $(f_i \geq\geq f)$ implica $\bigcup_i f_i \leq\leq f$ $(\bigcap_i f_i \geq\geq f)$, donde $\bigcup_i$, $\bigcap_i$ están tomadas respecto del orden natural $\leq$. Para cada f fijo consideramos los posibles elementos $f_i \geq\geq f$ y definimos: $Ef =$ *salto de* $f = \bigcap_i f_i$. Indicamos con N (N') el conjunto de los f tales que $Ef=0$ $(Ef=f)$. Demostramos que N y N' son (l)-ideales conjugados en sentido de Riesz-Birkhoff y que

(*) Resumen de la comunicación presentada en la sesión de la U. M. A. del 10 de julio de 1947.

el estudio de los l – ideales equivale al de las relaciones subordinadas. Extendiendo la noción de subordinación al caso de un semigrupo regular cualquiera, generalizamos para tales semigrupos los resultados conocidos de Riesz, Birkhoff, Kasutani y Bochner-Phillips, que estos autores establecieron en el caso de $(v-l)$ – semigrupos.

6. — Ampliando el método de subordinación, generalizamos la teoría de integral de Kolmogoroff (de igual modo como Riesz y Birkhoff generalizaron por medio de los l – ideales la teoría de Lebesgue), lo cual no se consigue por la aplicación directa de la teoría de l – ideales de Riesz-Birkhoff. Finalmente el método de subordinación permite unificar los dos casos de actividad simple y completa de la teoría de Lebesgue-Fréchet dentro de una teoría más amplia, de funcionales sobre dominios de Riesz generalizados.

TEORIA DE REPRESENTACION DE GRUPOS Y SEMIGRUPOS VECTORIALES ORDENADOS (*)

por E. Zarantonello y M. Cotlar

El propósito de esta exposición es presentar una teoría de representación de (o) – grupos y (o) – semigrupos vectoriales arquimedeanos y casiarquimedeanos mediante estructuras análogas cuyos elementos son funciones numéricas de punto. Antes de entrar de lleno en la cuestión daremos algunos ejemplos que servirán de guía en lo que sigue más adelante. Por el momento nos limitaremos a (l) – grupos vectoriales. Son ejemplos:

1. — El conjunto de todas las funciones reales definidas en el intervalo $(0,1)$ ordenadas así: $x < y$ si $x(t) \leq y(t)$ para $0 \leq t \leq 1$.

2. — El conjunto de las funciones medibles definidas en el mismo intervalo dispuestas según el ordenamiento: $x < y$ si $x(t) \leq y(t)$ para casi todo t de $(0,1)$. En este caso se consideran idénticas funciones que sólo difieren en un conjunto de medida nula.

3. — El mismo ejemplo anterior pero en el cual el intervalo $(0,1)$ y su medida son sustituídos por un conjunto abstracto Ω y una medida μ sobre él.

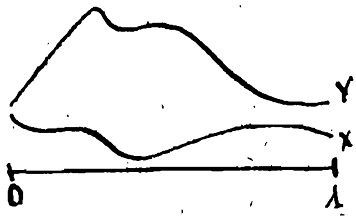
4. — Generalizando aún más, puede suprimirse la medida dando en cambio una clase completamente aditiva $\{X\}$ de conjuntos (medibles) y entre ellos un ideal $\{N\}$ (conjuntos de medida nula) y considerando las funciones medibles definidas salvo conjuntos nulos.

Este es el fin de nuestra serie, a partir de aquí podrá tal vez generalizarse más, pero es inútil, pues todo (l) – grupo vectorial arquimedeano es isomorfo a uno de esta última especie.

Para dar con precisión el teorema de representación convendrá recorrer algunos pasos de su demostración, todos ellos de interés independiente del teorema mismo.

(*) Resumen de la comunicación presentada en la sesión de la U. M. A. del 10 de julio de 1947.

Sea L un $(\sigma - l)$-grupo vectorial con unidad (*unidad* es un elemento 1 tal que $a \wedge 1 = 0$ implica $a = 0$).



I. Representación espectral. — Toda función numérica x (ver ejemplos anteriores) queda perfectamente definida cuando para cada número real λ se conoce el conjunto, o su función característica $e_x(\lambda)$, donde la función es mayor que λ. Las funciones características están caracterizadas por las condiciones $e(t) \geq 0$, $e(t) \wedge (1 - e(t)) = 0$; y la familia $e_x(\lambda)$ de funciones características tienen las propiedades:

a) $\lambda \leq \mu \therefore e_x(\lambda) > e_x(\mu)$.

b) $1 = e_x(-\infty)$, $e_x(+\infty) = 0$.

c) $e_x(\lambda) = \lim\limits_{\sigma \to \lambda +} e_x(\sigma)$.

Familias $e(\lambda)$ con estas propiedades se llaman *resoluciones de la unidad.* Estas definiciones de elementos característicos y resoluciones de la unidad son de inmediato transportables a L. Los elementos característicos forman una álgebra de Boole E. Aquí como en el caso de las funciones a cada elemento x corresponde una resolución de la unidad $e_x(\lambda)$ que lo individualiza, trasladándose las operaciones entre elementos a operaciones entre resoluciones de la unidad que en última instancia no son más que operaciones en un álgebra de Boole. De este modo L queda, por así decir, plasmado en su álgebra de Boole. Estas consideraciones quedan cerradas por el teorema:

El conjunto de las resoluciones de la unidad sobre E forman un $(\sigma - l)$-grupo vectorial que contiene un sub(l)-grupo vectorial isomorfo a L

Esta teoría ha sido desarrollada por H. Freudenthal; nosotros sólo hemos agregado cuestiones de detalle.

II. Representación de Álgebras de Boole. — El resultado anterior reduce en cierto modo el problema a la representación de álgebras de Boole. En este sentido disponemos del teorema de Stone-Wallmann que establece que toda álgebra de Boole E es isomorfa al álgebra de conjuntos abiertos y cerrados de un espacio topológico Ω, compacto de Haussdorff totalmente disconexo (espacio de Boole). Se tiene así una representación mediante un álgebra de conjuntos pero que tiene el inconveniente que sus elementos no se manejan según las operaciones corrientes de la teoría de conjuntos, condición ésta, indispensable para obtener una vinculación con funciones. Para obviar este inconveniente se deben manejar los conjuntos del álgebra módulo conjuntos de primera categoría. El desarrollo de esta idea conduce al siguiente teorema:

Los conjuntos medibles Borel módulo conjuntos de primera categoría en un espacio Boole forman un álgebra de Boole completa, isomorfa a la complexión del álgebra de conjuntos abiertos y cerrados

Es claro que los conjuntos medibles Borel módulo conjuntos de primera categoría se manejan de acuerdo a las reglas corrientes del álgebra de conjuntos, que era precisamente lo que pretendíamos. Sin embargo el teorema anterior tiene una significación más amplia que trasciende este simple hecho al dar un nuevo procedimiento de complexión de una estructura ordenada. Con su ayuda puede por ejemplo mostrarse, que un álgebra de Boole de conjuntos de puntos de un dado espacio puede completarse por agregación de puntos y reducción posterior módulo ciertos conjuntos nulos, hecho este que tiene algún interés en teoría de la integración.

III. Representación de (l)—grupos vectoriales. — Los dos capítulos anteriores tienden un puente entre elementos de un $(\sigma\text{-}l)$-grupo vectorial con unidad y funciones. En efecto: a) $x \longrightarrow e_x(\lambda)$: de un elemento x a su resolución de la unidad; b) $e_x(\lambda) \longrightarrow E_x(\lambda)$: de resoluciones de la unidad a resoluciones de la unidad a valores conjuntos Borel módulo conjuntos de primera categoría; c) $E_x(\lambda) \longrightarrow x(t)$: de $E_x(\lambda)$ a una función medible Borel definida casi donde quiera en un espacio de Boole. La conclusión puede sintetizarse así:

Las funciones medibles Borel definidas casi dondequiera en un espacio de Boole forman un $(v-l)$- grupo vectorial con unidad. Todo $(\sigma-l)$-grupo vectorial puede ser incluído por isomorfismo con preservación de suprema e ínfima en una estructura de esta especie.

Este teorema proporciona representación funcional a toda estructura incluíble en un $(\sigma\text{-}l)$- grupo vectorial; así, echando mano a los resultados sobre complexión de semigrupos arquimedianos y casiarquimedeanos mencionados en la primera parte de este trabajo se llega al siguiente resultado final:

Para que un semigrupo vectorial positivo sea isomorfo a un subsemigrupo del semigrupo de las funciones positivas medibles Borel definidas casi dondequiera en un espacio de Boole, es necesario y suficiente que sea casi arquimedeano. La condición de Arquímedes caracteriza entre ellos a los subsemigrupos característicos.

Para una aplicación final de los teoremas anteriores consideramos el (l)-grupo vectorial de funciones de conjunto absolutamente continuas respecto de una medida (aditiva pero no necesariamente completamente aditiva). En este caso la representación establece una correspondencia con propiedades de una derivada entre funciones de conjunto y funciones de punto, apareciendo así la representación como una derivación generalizada. Se logra pues una extensión del teorema de Radon-Nikodym al caso de aditividad simple.