ACERCA DE UNA TRANSFORMACION CANONICA DEL CAMPO DE RADIACION

por José A. Balseiro
(Instituto de Física. - La Plata)

Summary. — It is shown that the canonical transformation, which leads from the variables p, q of a linear oscilator to the new variables N, ϑ (N, number of excitation, ϑ phase) does not fit with the ordinary scheme of transformation theory. A generalization of this scheme, suitable for the present case, is given.

§ 1. - *Introducción.*

El campo de radiación cuantificado se describe mediante un par de variables canónicas, p_r, q_r, correspondientes a cada onda definida por el índice r. En esta representación el hamiltoniano del campo es:

$$H = \frac{1}{2} \int (\vec{E}^+ - i\vec{H}^+) (\vec{E} + i\vec{H}) \, d\tau = \Sigma \frac{1}{2} (p_r^2 + w_r^2 q_r^2 - h v_r)$$
$$(w_r = 2\pi v_r) \qquad (1.1)$$

Las funciones propias de (1.1) son, como es sabido, las funciones de Hermite $e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi_r)$, $(\xi_r = 2\pi \sqrt{\frac{v_r}{h}} q_r)$ y los valores propios de H sor $n_r h v_r$, siendo n_r números enteros y positivos.

El campo de radiación cuantificado puede describirse, también, mediante las variables complementarias N_r, ϑ_r. La primera es el número de fotones asociados al estado r y ϑ_r la variable de fase correspondiente a este estado. Cumplen la relación de conmutación:

$$N_r \vartheta_{r'} - \vartheta_{r'} N_r = i\delta_{r'r}. \tag{1.2}$$

El hamiltoniano (1. 1) en esta representación, teniendo presente (1. 2), es de la forma:

$$H = \Sigma\, h\nu_r N_r = i\, \Sigma\, h\nu_r \frac{\partial}{\partial \vartheta_r}. \tag{1.3}$$

Las funciones propias de (1. 3) son, pues:

$$H\, \Gamma_n(\vartheta) = i\, h\nu_r \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} e^{-i n_r \vartheta_r} = n_r h\nu_r \Gamma_n(\vartheta) \qquad n_r = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$H\, \Gamma_{-n}(\vartheta) = i\, h\nu_r \frac{\partial}{\partial \vartheta_r} e^{+i n_r \vartheta_r} = -\, n_r h\nu_r \Gamma_{-n}(\vartheta) \qquad n_r = 1, 2, 3, \ldots.$$

En este caso el sistema completo de las autofunciones es el conjunto $e^{-i n_r \vartheta_r}$, $e^{+i n_r \vartheta_r}$, de las cuales sólo las primeras conducen a valores positivos de la energía. Al pasar de la representación p, q a la N, ϑ los valores propios de N, que son números enteros positivos en la primera representación, se desdoblan en positivos y negativos en la última. En la representación N, ϑ no es posible, como a veces se hace, dejar de lado las funciones $\Gamma_{-n}(\vartheta)$, que conducen a los valores propios negativos, pues en esta forma se pierde la completidad del sistema de las autofunciones.

En el presente trabajo se discute, desde el punto de vista de las transformaciones canónicas, la transformación de la representación p, q a la representación N, ϑ. En esta forma es posible obtener las funciones $\Gamma_n(\vartheta)$ como las funciones transformadas de $e^{-\frac{\xi^2}{2}} \mathrm{H}_n(\xi)$. En cambio, $\Gamma_{-n}(\vartheta)$ se obtienen como transformadas de las soluciones de la ecuación de Hermite correspondiente a valores imaginarios de las variables q. Como consecuencia del formalismo desarrollado se obtiene que, en virtud de la necesidad de considerar el sistema completo $\Gamma_n(\vartheta)$, $\Gamma_{-n}(\vartheta)$, no puede prescindirse en la descripción N, ϑ de fotones de energía negativa. Esto es equivalente, en la representación p, q, a la necesidad de considerar las soluciones de la ecuación de Hermite, no sólo sobre el eje real de las variables q, sino, también, las soluciones sobre el eje imaginario.

§ 2. - *Transformaciones canónicas.*

La teoría de las transformaciones canónicas cuánticas fué desarrollada por Jordan (1) y Dirac (2). Para nuestro objeto necesitamos algunas relaciones que no figuran explícitamente en estos trabajos.

Sea dada una transformación entre las variables canónicas $p_1, p_2, \ldots q_1, q_2 \ldots$ y $P_1, P_1, \ldots Q_1, Q_2, \ldots$ que, naturalmente, satisfacen la relación de conmutación de Heisenberg. Podemos dar la transformación canónica que consideramos en la forma:

$$\begin{aligned} p &= p(Q, q) \\ P &= P(Q, q) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

en donde se han suprimido los subíndices. Si la transformación es dada en esta forma, deben considerarse como independientes a las variables Q y q, es decir $\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial q}{\partial Q} = 0$. Estas relaciones equivalen a:

$$\begin{aligned} pQ - Qp &= -\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial Q}{\partial q} = 0 \\ Pq - qP &= -\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial q}{\partial Q} = 0 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Las variables p conmutan, pues, con las Q, y las P con las q.

Si $W(q, Q)$ es la función generatriz de la transformación canónica, se cumple:

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r} \qquad P_s = -\frac{\partial W}{\partial Q_s}. \qquad (2.3)$$

De aquí,

$$\frac{\partial p_r}{\partial Q_s} = -\frac{\partial P_s}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_r \partial Q_s} \neq 0.$$

(1) P. JORDAN, Z. f. Physik, *37*, 383 (1926) y *38*, 513 (1926).

(2) P. A. M. DIRAC, Proc. Roy. Soc. London, 116, 633 (1927).

Luego:

$$pP - Pp = -i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial q} = i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial P}{\partial q} \neq 0. \tag{2.4}$$

Las variables p, P no conmutan. Teniendo esto presente, de la (2.1) se sigue que q y Q tampoco conmutan:

$$qQ - Qq \neq 0. \tag{2.5}$$

Dada una función $\psi(q)$ referida al sistema de variables p, q, se transforma en $F(Q)$ mediante:

$$F(Q) = \int S(q, Q)\, \psi(q)\, \sigma(q)\, dq \tag{2.6}$$

donde $S(q, Q)$ es la función de transformación y $\sigma(q)$ es una función de densidad. Recíprocamente:

$$\psi(q) = \int S^*(q, Q)\, F(Q)\, \rho(Q)\, dQ \tag{2.7}$$

siendo $\rho(Q)$ una función de densidad respecto de las variables Q.

Si $\psi_\lambda(q)$ forman un sistema ortogonal de funciones normalizadas con la función de densidad $\sigma(q)$

$$\int \psi_{\lambda'}^*(q)\, \psi_\lambda(q)\, \sigma(q)\, dq = \delta_{\lambda'\lambda} \tag{2.8}$$

puede demostrarse que las funciones transformadas en caso de variables, q, Q reales, forman también un sistema ortogonal con la función de densidad $\rho(Q)$:

$$\int F_{\lambda'}^*(Q)\, F_\lambda(Q)\, \rho(Q)\, dQ = \delta_{\lambda'\lambda}. \tag{2.9}$$

Por otra parte, considerando que

$$p = -i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q} \qquad P = -i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}$$

es posible demostrar que:

$$S(q, Q) = e^{-\frac{2\pi i}{h} W(q, Q)} . \tag{2.10}$$

Esta expresión permite determinar $S(q, Q)$ cuando se dá la transformación (2. 1), pues por la propiedad (2. 3) de $W(q, Q)$ se tiene:

$$dW = \sum_r \left(\frac{\partial W}{\partial q_r} dq_r + \frac{\partial W}{dQ_r} dQ_r\right) = \sum_r (p_r\, dq_r - P_r\, dQ_r).$$

Nos interesa, en forma especial, la ecuación diferencial a la cual satisface $S(q, Q)$, cuando la energía queda referida a los ejes principales, tanto en el sistema p, q como en el P, Q. Sea $H(p, q) = H\left(-\frac{ih}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial q}, q\right)$ el hamiltoniano en el sistema p, q y $\sqrt{\sigma(q)}\,\psi(q)$ sus autofunciones:

$$H\left(-\frac{ih}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial q}, q\right)\sqrt{\sigma(q)}\,\psi_\lambda(q) = \lambda\,\sqrt{\sigma(q)}\,\psi_\lambda(q). \tag{2.11}$$

Análogamente para el sistema P, Q:

$$\mathcal{H}\left(-\frac{ih}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial q}, Q\right)\sqrt{\rho(Q)}\,\Gamma_\lambda(Q) = \lambda\,\sqrt{\rho(Q)}\,\Gamma_\lambda(Q). \tag{2.12}$$

Multiplicando (2. 11) por $\sqrt{\sigma(q)}\,S(q, Q)$ e integrando:

$$\int \sqrt{\sigma(q)}\,S(q, Q)\left[H\left(-\frac{ih}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial Q}, q\right)\sqrt{\sigma(q)}\,\psi_\lambda(q)\right] dq =$$

$$\lambda \int S(q, Q)\,\psi_\lambda(q)\,\sigma(q)\,dq =$$

$$= \lambda\,\Gamma_\lambda(Q) = \frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}}\left[\mathcal{H}\left(-\frac{ih}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial Q}, Q\right)\sqrt{\rho(Q)}\,\Gamma_\lambda(Q)\right].$$

Integrando por partes la primera de estas integrales, llamando $\overline{H}\left(\mp\frac{ih}{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial q}, q\right)$ a la forma diferencial adjunta de $H\left(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q}, q\right)$ y considerando que en el límite de integración las funciones $\sqrt{\sigma(q)}\,\psi_\lambda(q)$ deben anularse, se obtiene:

$$\int [\bar{H}\left(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q}, q\right)\sqrt{\sigma(q)}\, S(q,Q)]\sqrt{\sigma(q)}\,\psi_\lambda(q)\,dq =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}}[\mathcal{H}\left(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q\right)\sqrt{\rho(Q)}\,F_\lambda(Q)] =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}}[\mathcal{H}\left(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q\right)\sqrt{\rho(Q)}\,S(q,Q)]\,\psi_\lambda(q)\sigma(q)\,dq.$$

Puesto que esta relación se cumple para cualquier valor de Q y λ, se sigue que:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(q)}}[\bar{H}\left(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q}, q\right)\sqrt{\sigma(q)}\,S(q,Q)] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}}[\mathcal{H}\left(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q\right)\sqrt{\rho(Q)}\,S(q,Q)]. \quad (2.13)$$

Esta es la ecuación diferencial a la cual satisface $S(q,Q)$.

Procediendo en forma análoga y partiendo de (2.12) se llega a:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma(q)}}[H\left(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q}, q\right)\sqrt{\sigma(q)}\,S^*(q,Q)] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho(Q)}}[\bar{\mathcal{H}}\left(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q}, Q\right)\sqrt{\rho(Q)}\,S^*(q,Q)]. \quad (2.14)$$

§ 3. - *Transformación* $p, q \longrightarrow N, \vartheta$.

Los operadores de emisión a_r^+ y absorción a_r de un campo de radiación cuantificado están vinculados con las variables p_r, q_r y N_r, ϑ_r mediante las relaciones (3):

(3) Ver p. e. W. Heitler, *The quantun theory of radiation*, § 7, Oxford Univ. Press, 1944.

$$a_r^+ = \frac{-i}{\sqrt{2hv_r}}(p_r + iw_r\, q_r) = \sqrt{N_r}\, e^{-i\vartheta_r}$$

$$a_r = \frac{i}{\sqrt{2hv_r}}(p_r - iw_r\, q_r) = e^{i\vartheta_r}\sqrt{N_r}. \tag{3.1}$$

De (1.2), si se define una nueva variable $\mathcal{N}_r = -\frac{h}{2\pi} N_r$, se tiene:

$$\mathcal{N}_r\, \vartheta_{r'} - \vartheta_{r'}\, \mathcal{N}_r = -i \frac{h}{2\pi}\, \delta_{rr'}.$$

$\mathcal{N}_r$ y ϑ_r son, en esta forma, variables canónicamente conjugadas. La (3.1) es, pues, una transformación canónica entre las variables p, q y $\mathcal{N}_r, \vartheta_r$.

Respecto de la nomenclatura empleada anteriormente es $\mathcal{N} = P$ y $\vartheta = Q$.

Según (2.2) las variables p conmutan con las ϑ y las N con las q. No así p con N ni q con ϑ.

De (3.1) se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta} q\, e^{-i\vartheta} - e^{-i\vartheta} q\, e^{i\vartheta} &= e^{2i\vartheta} q - q\, e^{2i\vartheta} \\ e^{i\vartheta} q\, e^{-i\vartheta} - e^{-i\vartheta} q\, e^{i\vartheta} &= q\, e^{-2i\vartheta} - e^{-2i\vartheta} q \end{aligned} \tag{3.2}$$

y de aquí resulta

$$\cos^2\vartheta\, q = q \cos^2\vartheta.$$
$$\operatorname{sen}^2\vartheta\, q = q \operatorname{sen}^2\vartheta.$$

Derivando respecto de ϑ y mediante las (3.2) se obtiene:

$$e^{2i\vartheta} q = q\, e^{2i\vartheta}$$

y de aquí se obtiene que q también conmuta con tag ϑ. Con estas relaciones sin mayor dificultad se encuentra que:

$$p = w\, q \operatorname{tag} \vartheta$$

$$\mathcal{N} = -\frac{h}{2\pi} N = -\frac{h}{2\pi}\left[\frac{1}{2hv}(p^2 + w^2 q^2 - hv)\right]$$

$$= -\frac{1}{2} w\, q^2 \frac{1}{\cos^2\vartheta} + \frac{1}{2}\frac{h}{2\pi}.$$

De (2. 3) se obtiene que la función generatriz es:

$$-\frac{2\pi i}{h}W=-\frac{i}{2}4\pi^2\frac{v}{h}q^2\operatorname{tag}\vartheta+\frac{i}{2}\vartheta=-\frac{i}{2}\xi^2\operatorname{tag}\vartheta+\frac{i}{2}\vartheta$$

$$(\xi=2\pi\sqrt{\frac{v}{h}}q). \quad (3.3)$$

Finalmente la función de transformación, según la (2. 10) es:

$$S(\xi,\vartheta)=e^{-i\frac{\xi^2}{2}\operatorname{tag}\vartheta+i\frac{\vartheta}{2}} \quad (3.4)$$

§ 4. - *Transformación de las funciones propias.*

Estando dados $H(-i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q},q)$, $\mathcal{H}(-i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q},Q)$ y $S(q,Q)$ las funciones de densidad $\sigma(q)$ y $\rho(Q)$ quedan determinadas mediante la ecuación (2. 13). Si se resuelve este problema, en general, no se encontrará un único par de funciones $\sigma(q)$, $\rho(Q)$, sino un sistema de soluciones $\sigma_1(q)$, $\rho_1(Q)$; $\sigma_2(q)$, $\rho_2(Q)$ .... Conocidas en esta forma las funciones de densidad habrá que determinar a qué funciones $\psi(q)$ y $\Gamma(Q)$ corresponden.

Consideremos las funciones de densidad posibles cuando la función de transformación está dada por la (3. 4),

$$H(-i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q},q)=\frac{hv}{2}(-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\xi^2-1)$$

y

$$\mathcal{H}(-\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial Q},Q)=ihv\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

En este caso la (2. 13) es:

$$\frac{1}{2\sqrt{\sigma(\xi)}}[(-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\xi^2-1)\sqrt{\sigma(\xi)}\,e^{-\frac{i}{2}\xi^2\operatorname{tg}\vartheta+\frac{i}{2}\vartheta}]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho(\vartheta)}}i\frac{\partial}{\partial\vartheta}[\sqrt{\rho(\vartheta)}\,e^{-\frac{i}{2}\xi^2\operatorname{tg}\vartheta+\frac{i}{2}\vartheta}].$$

Efectuando operaciones se llega a:

$$-\frac{\sigma''(\xi)}{2\sigma(\xi)}+\left(\frac{\sigma'(\xi)}{2\sigma(\xi)}\right)^2+i\operatorname{tg}\vartheta\left[1+\frac{\sigma'(\xi)}{\sigma(\xi)}\xi\right]-i\frac{\rho'(\vartheta)}{\rho(\vartheta)}=0. \qquad (4.1)$$

Siiendo ξ y ϑ variables independientes, la (4. 1) admite solución cuando:

$$1+\frac{\sigma'(\xi)}{\sigma(\xi)}\,\xi=a=\text{const.} \qquad (4.2)$$

$$i\,.\,a\,.\operatorname{tag}\vartheta-i\,\frac{\rho'(\vartheta)}{\rho(\vartheta)}=b=\text{const.} \qquad (4.3)$$

$$-\frac{\sigma''(\xi)}{2\sigma(\xi)}+\left(\frac{\sigma'(\xi)}{2\sigma(\xi)}\right)^2=-b. \qquad (4.4)$$

De (4. 2) se obtiene:

$$\sigma(\xi)=\text{const.}\ \xi^{a-1}. \qquad (4.5)$$

Mediante la (4. 4) se determinan los valores de a y b que satisfacen la (4. 1). Sustituyendo en ésta el valor de $\sigma(\xi)$ dado por (4. 5) se llega:

$$\frac{1}{2}(a-1)\left[\frac{1}{2}(a-1)-a+2\right]\xi^{-2}=-b.$$

De aquí:

$$a_1=1, \qquad a_2=3, \qquad b=0.$$

Existen, pues, dos funciones de densidad

$$\sigma_1(\xi)=\alpha_1=\text{const.} \qquad \sigma_2(\xi)=\alpha_2\,\xi^2. \qquad (4.6)$$

a las cuales, según (4. 3), corresponden, para $b=0$, las funciones:

$$\rho_1(\vartheta)=\frac{\beta_1}{\cos\vartheta} \qquad \rho_2(\vartheta)=\frac{\beta_2}{\cos^3\vartheta}. \qquad (4.7)$$

Con estos elementos estamos en condiciones de encontrar la transformación de las funciones $e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi)$ a las funciones $\Gamma_n(\vartheta)$:

$$\Gamma_n(\vartheta) = e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2}\xi^2 \operatorname{tag}\vartheta} \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)\, \sigma(\xi)\, d\xi$$

$$= e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 s(\vartheta)}\, H_n(\xi)\, \sigma(\xi)\, d\xi \qquad (4.8)$$

con

$$S(\vartheta) = \frac{e^{i\vartheta}}{2\cos\vartheta} \qquad R[S(\vartheta)] = \frac{1}{2} > 0. \qquad (4.9)$$

Debemos astablecer, en primer término, cuándo corresponde emplear $\sigma_1(\xi) = \alpha_1$ o $\sigma_2(\xi) = \alpha_2\, \xi^2$. Según (2.8) se tiene:

$$\text{para } \sigma_1(\xi) = \alpha_1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}\, H_{n'}(\xi)\, H_n(\xi)\, \alpha_1\, d\xi = \alpha_1\, c_n\, \delta_{n'n}.$$

$$\text{para } \sigma_2(\xi) = \alpha_2\, \xi^2, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \left(\frac{1}{\xi} H_{n'}(\xi)\right) \left(\frac{1}{\xi} H_n(\xi)\right) \alpha_2\, \xi^2\, d\xi =$$

$$= \alpha_2\, c_n\, \delta_{n'n}.$$

Es decir, para $\sigma_2(\xi)$ debe considerarse la transformación de $\frac{1}{\xi} H_n(\xi)$.

Puesto que $H_{2n}(\xi)$ es un polinomio par y $H_{2n+1}(\xi)$ es impar, la (4.8) es distinta de cero para $n = 2m$ y $\sigma(\xi) = \alpha_1$ y cero cuando $\sigma(\xi) = \alpha_2\, \xi^2$. Recíprocamente es nula cuando $n = 2m+1$ y $\sigma(\xi) = \alpha_1$ y distinta de cero para $\sigma(\xi) = \alpha_2\, \xi^2$. En esta forma se tiene:

$$\Gamma_{2n}(\vartheta) = \alpha_1\, e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 s(\vartheta)}\, H_{2n}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{\alpha_1}{2}\, e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\eta\, s(\vartheta)} \frac{1}{\sqrt{\eta}} H_{2n}(\sqrt{\eta})\, d\eta \qquad (4.10)$$

$$\Gamma_{2n+1}(\vartheta) = \alpha_2 e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 s(\vartheta)} \frac{1}{\xi} H_{2n+1}(\xi)\, \xi^2\, d\xi =$$

$$= \frac{\alpha_2}{2} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\eta s(\vartheta)} H_{2n+1}(\sqrt{\eta})\, d\eta. \quad (4.11)$$

$$(\eta = \xi^2)$$

Las (4.10) y (4.11) son las transformadas de Laplace de las funciones $\frac{1}{\sqrt{\eta}} H_{2n}(\sqrt{\eta})$ y $H_{2n+1}(\sqrt{\eta})$ respectivamente; las funciones transformadas son conocidas (4) cumpliéndose la condición de convergencia $R(S(\vartheta)) > 0$:

$$\Gamma_{2n}(\vartheta) = \frac{\alpha_1}{2} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \sqrt{\pi} \frac{(2n)!}{n!} \frac{[1-S(\vartheta)]^n}{[S(\vartheta)]^{n+1/2}} =$$

$$= \alpha_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{n!} \cos^{1/2}\vartheta\, e^{-i2n\vartheta} \quad (4.12)$$

$$\Gamma_{2n+1}(\vartheta) = -\frac{\alpha_2}{2} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \sqrt{\pi} \frac{(2n+1)!}{n!} \frac{[1-S(\vartheta)]^n}{[S(\vartheta)]^{n+3/2}} = -$$

$$= -\alpha_2 \sqrt{2\pi} \frac{(2n+1)!}{n!} \cos^{3/2}\vartheta\, e^{-i(2n+1)\vartheta}. \quad (4.13)$$

A las funciones $e^{-i2n\vartheta}$ les corresponde la función de densidad $\frac{\text{const}}{\cos\vartheta}$ y a las $e^{-i(2n+1)\vartheta}$ les corresponde $\frac{\text{const}}{\cos^3\vartheta}$. Estas son las funciones de densidad calculadas anteriormente y dadas por (4.6).

Estas funciones propias corresponden a valores propios positivos de la energía.

§5. - *Valores propios negativos.*

El sistema ortogonal completo de las funciones $e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)$ se transforma, como hemos visto, en el sistema semicompleto de

(4) Ver G. Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace Transformation*, pág. 403, Julius Springer, Berlin, 1937.

las funciones $e^{-in\vartheta}(n>0)$. Debemos ahora, con el objeto de poder disponer del sistema completo de estas funciones, hallar en qué condiciones se encuentran las funciones $e^{in\vartheta}$.

Consideremos la función de transformación

$$S(\zeta, \vartheta) = e^{+i\frac{\xi^2}{2}\,\mathrm{tag}\,\vartheta + i\frac{\vartheta}{2}} \tag{5.1}$$

Resulta

$$S^*(\vartheta) = \frac{e^{-i\vartheta}}{2\cos\vartheta}, \qquad R(S^*(\vartheta)) = \frac{1}{2} > 0,$$

con lo que las expresiones análogas a (4.12) y (4.13) que se obtienen son:

$$\alpha_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(2n)!}{n!}\cos^{1/2}\vartheta\, e^{+i(2n+1)\vartheta}$$

$$-\alpha_2\sqrt{2\pi}\,\frac{(2n+1)!}{n!}\cos^{3/2}\vartheta\, e^{+i(2n+2)\vartheta}.$$

Se obtiene, pues, que mediante la función de transformación (5.1) se transforma

$$e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\zeta) \rightarrow e^{+in\vartheta}.$$

Ahora bien: se obtiene (5.1) a partir de (3.4) si establecemos que $\xi = i\zeta$. Por otra parte, la ecuación de Hermite:

$$\frac{d^2F_n(\xi)}{d\xi^2} - \xi^2 F_n(\xi) + (2n+1)\,F_n(\xi) = 0$$

$$\left(F_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)\right) \tag{5.2}$$

para valores reales de ξ tiene por valores propios números enteros positivos. En cambio, para valores negativos de n:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}F_{-n}(\xi) - \xi^2 F_{-n}(\xi) + (-2n+1)\,F_{-n}(\xi) = 0 \tag{5.3}$$

admite soluciones ortogonales que se anulan en el infinito si

$\xi = i\zeta$. En efecto, haciendo el cambio de variables se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2 F_{-n}(i\zeta)}{d\zeta^2} - \zeta^2 F_{-n}(i\zeta) + (2n-1) F_{-n}(i\zeta) = 0,$$

cuyas soluciones son, si se compara esta ecuación, con la (5. 3)

$$F_{-n}(i\zeta) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\zeta).$$

De lo dicho resulta que:

$$\Gamma_{-n}(\vartheta) = e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\zeta^2}{2}\operatorname{tag}\vartheta} F_{-n}(i\zeta)\, \sigma(\zeta)\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\frac{\vartheta}{2}} \int_{0}^{\infty} e^{-\eta S^*(\vartheta)} H_n(\sqrt{\eta})\, \sigma(\sqrt{\eta})\, d\eta$$

$$(\eta = \zeta^2).$$

Se obtiene así, que la transformada de $e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n-1}(\zeta)$ es, como lo indica la (5,2), la función $e^{in\vartheta}$. Estas funciones corresponden, ahora, a valores propios negativos de la energía.

Puede apreciarse, de lo dicho, en qué forma se corresponde el sistema completo de funciones $e^{-in\vartheta}$, $e^{+in\vartheta}$ con el sistema también completo de las funciones $e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)$: El primer conjunto de las funciones $e^{-in\vartheta}$ se corresponde, mediante la transformación canónica $N, \vartheta \longrightarrow p, q$ con las soluciones de la ecuación de Hermite para valores reales de la variable q y conducen a valores propios positivos de la energía. En cambio, el conjunto de las funciones $e^{in\vartheta}$ se corresponde con las soluciones ortogonales de esta ecuación para valores imaginarios de q, y conducen a valores negativos de la energía.

En la descripción N, ϑ del campo de radiación resulta, pues, necesaria la introducción de fotones de energía negativa, lo que, en la descripción p, q implica la necesidad de considerar las soluciones de la ecuación del oscilador lineal sobre el eje imaginario del plano complejo de la variable q. Aunque en este último caso, si se prescinde de la representación N, ϑ, no resulta muy visible esta necesidad, debido a que unas y otras soluciones de aquella ecuación forman de por sí sistemas completos.

La generalización obtenida del esquema de las transformaciones canónicas no deja ver, sin embargo, cuál es el origen de la dificultad que tratamos. Pero el hecho es que la correspondencia biunívoca entre las autofunciones correspondientes a ambas representaciones, sólo se obtiene si se tienen en cuenta las soluciones de la ecuación del oscilador lineal en el eje imaginario. Esto equivale a considerar a las variables q como antihermitianas, en forma análoga a la empleada por W. Pauli (5) al aplicar a un sistema de osciladores lineales el método de cuantificación de Dirac (6). En el formalismo desarrollado aparece como natural la necesidad de considerar estos valores de q en el antiguo método de cuantificación del campo de radiación.

Agradezco al Prof. G. Beck el haber llamado mi atención sobre este punto y las discusiones mantenidas respecto de asuntos tratados en este trabajo, y al Prof. R. Gans su interés por el mismo.

José A. Balseiro

(5) W. Pauli, Rev. Mod. Phys. *15*, 176, (1943).
(6) P. A. M. Dirac, Proc. Rey. Soc. *A180*, 1 (1942).