COEFICIENTES DE KUMMER

por PEDRO A. PIZÁ
San Juan de Puerto Rico

Con los primeros resultados de sus célebres investigaciones referentes a la ecuación de Fermat $x^n+y^n=a^n$ publicados en 1837, Kummer introdujo y utilizó cierta fórmula en la que aparecen todas las potencias pares o impares de $x+y=z$ (*). Esta fórmula debida a Kummer, fué demostrada posteriormente por Mention. Puede escribirse para cualquier exponente n como sigue:

$$x^n+y^n=z^n-n\,xyz^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2}x^2y^2z^{n-4}$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{3!}x^3y^3z^{n-6}+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{4!}x^4y^4z^{n-8}$$

$$-\frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{5!}x^5y^5z^{n-10}+\ldots.$$

Con exponentes pares $n=2m$, el segundo miembro de esta igualdad contiene contiene $\frac{n}{2}+1=m+1$ términos. Con exponentes impares $n=2m+1$, el número de términos es de $(n+1)/2=m+1$. Para nuestros fines podemos designar convenientemente sus coeficientes, que alternan en signo, por $K_1{}^n=1$, $K_2{}^n=-n$, $K_3{}^n=n(n-3)/2$, $K_4{}^n=-n(n-4)(n-5)/6$, etc.

Es interesante computar una tabla de estos valores numéricos que resultan ser siempre números enteros y que llamaremos

(*) Véase DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, vol. II, págs. 737 y 739, citas 25 y 43.

coeficientes de Kummer, para los primeros valores de n, con el fin de observar y estudiar sus propiedades interesantísimas. Tal tabla, calculada hasta $n = 23$, sin tomar en cuenta que en las columnas pares los coeficientes son negativos, y positivos en las columnas impares, es como sigue:

K_1^n	$-K_2^n$	K_3^n	$-K_4^n$	K_5^n	$-K_6^n$	K_7^n	$-K_8^n$	K_9^n	$-K_{10}^n$	K_{11}^n	$-K_{12}^n$
1											
1	2										
1	3										
1	4	2									
1	5	5									
1	6	9	2								
1	7	14	7								
1	8	20	16	2							
1	9	27	30	9							
1	10	35	50	25	2						
1	11	44	77	55	11						
1	12	54	112	105	36	2					
1	13	65	156	182	91	13					
1	14	77	210	294	196	49	2				
1	15	90	275	450	378	140	15				
1	16	104	352	660	672	336	64	2			
1	17	119	442	935	1122	714	204	17			
1	18	135	546	1287	1782	1386	540	81	2		
1	19	152	665	1729	2717	2508	1254	285	19		
1	20	170	800	2275	4004	4290	2640	825	100	2	
1	21	189	952	2940	5733	7007	5148	2079	385	21	
1	22	209	1122	3740	8008	11011	9438	4719	1210	121	2
1	23	230	1311	4692	10948	16744	16445	9867	3289	506	23

Tabla de Coeficientes de Kummer

Tengamos presente que la notación K_c^n nos indica el coeficiente de Kummer correspondiente al exponente n que aparece en la fila o línea horizontal n y en la columna vertical c de esta tabla triangular escalonada, en analogía con la notación C_s^n usada generalmente para indicar los coeficientes en la expansión del binomio de Newton según aparecen asimismo en la tabla o triángulo de Pascal.

Por inspección de nuestra tabla podemos observar que existen las siguientes notables relaciones entre los coeficientes de Kummer:

(1) Cada número en cualquier columna es la suma del que le precede en la misma columna, más el que aparece diagonalmente arriba y a la izquierda de este último. En general observamos

$$K_c^n = K_c^{n-1} + K_{c-1}^{n-2}.$$

Ejemplo: $K_6^{19} = 2717 = K_6^{18} + K_5^{17} = 1782 + 935.$

(2) Si sumamos las diagonales descendentes comenzando con las unidades sucesivas de la primer columna, obtenemos $1+2=3$. $1+3+2=6$, $1+4+5+2=12$, $1+5+9+7+2=24$.

En general la n-ava diagonal comenzando con la unidad de la primer columna correspondiente a la fila n, contendrá $(n+1)$ sumandos y su suma será

$$K_1^n + K_2^{n+1} + K_3^{n+2} + K_4^{n+3} + \ldots + K_{n+1}^{2n} = 3 \,.\, 2^{n-1}.$$

(3) Si multiplicamos cualquier par de números consecutivos de la segunda columna, su producto será igual a la suma de los tres números que forman ángulo recto debajo y a la derecha del mayor factor. Tendremos $K_2^n\, K_2^{n+1} = K_2^{n+2} + K_3^{n+1} + K_3^{n+2}$, equivalente a la identidad

$$n(n+1) = (n+2) + \frac{(n+2)(n-1)}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

(4) Si tomamos cualquier grupo de cuatro números contiguos que formen un cuadrado en las columnas 2 y 3, su suma es siempre un número cuadrado. Tendremos generalmente

$$K_2^n + K_3^n + K_2^{n+1} + K_3^{n+1} = n^2,$$

que equivale a la identidad

$$n + \frac{n(n-3)}{2} + (n+1) + \frac{(n+1)(n-2)}{2} = n^2.$$

(5) La suma de los primeros n números contiguos en cualquier columna c (después de la primer columna), es igual al número que aparece en la tabla dos filas más abajo en la próxima columna a la derecha.

Nótese que en cada columna c hay $(2c-3)$ espacios vacantes antes de llegar al primer número de la columna que siempre es 2, siendo el tercero siempre el cuadrado de c.

Ejemplos: 3ª columna: $2+5+9=16$.

9ª columna: $2+17+81+285=385$.

Generalmente en cualquier columna c tendremos

$$\sum_{i=2\ c-2}^{i=n} K_c{}^i = K_{c+1}{}^{i+2}.$$

El número total de espacios vacantes en la parte superior de la tabla hasta incluir la columna c, es de

$$1+3+5+7+\ldots=(c-1)^2.$$

Sin duda otras muchas propiedades numéricas de los coeficientes de Kummer en la tabla, podrán observarse y probarse en un estudio más extenso de la misma. Cada una de estas propiedades ilustrará una nueva propiedad número-teórica de los números enteros.

La propiedad general (1) nos permite computar recurrentemente los coeficientes correspondientes a cualquier fila n de la tabla, si ya conocemos las series de coeficientes de las filas $(n-1)$ y $(n-2)$.

Por ejemplo, la próxima fila 24 de la tabla consiste de los 13 números siguientes:

1, 24, 252, 1520, 5814, 14688, 24752, 27456, 19305, 8008, 1716, 144 y 2.

Con la relación (5) podremos desarrollar ciertas identidades de considerable interés numérico. Por ejemplo, todo número de la columna 3 nos dará

$$K_3{}^n=\frac{n(n-3)}{2}=2+3+4+5+\ldots+(n-2),$$

donde el segundo miembro contiene $(n-3)$ sumandos. Ejemplo:

$$K_3{}^9=2+3+4+5+6+7=27.$$

En general $K_3{}^n+1=$ a la suma de todos los números enteros positivos desde 1 al $(n-2)$ inclusive.

De igual modo cualquier número de la columna 4 es

$$K_4{}^n=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}=2+5+9+14+\ldots+\frac{(n-2)(n-5)}{2}$$

que podemos nuevamente escribir por sumas parciales como sigue:

$$\begin{aligned}K_4{}^n=2&\\ &+2+3\\ &+2+3+4\\ &+2+3+4+5\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+2+3+4+5+6+\ldots\ldots+(n-4).\end{aligned}$$

Sumando ahora por columnas empezando por la última, tendremos la relación o identidad

$$\begin{aligned}K_4{}^n=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}= &\quad (n-4)\\ &+2(n-5)\\ &+3(n-6)\\ &+4(n-7)\\ &+5(n-8)\\ &+6(n-9)\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}$$

donde el segundo miembro contiene $(n-5)$ sumandos. Esta relación es válida para cualquier valor de n mayor que 5. Un ejemplo numérico para $n=10$ es

$$\begin{aligned}\frac{10\,.\,6\,.\,5}{6}&=50=6+2\,.\,5+3\,.\,4+4\,.\,3+5\,.\,2\\ &=6+10+12+12+10=50.\end{aligned}$$

Es obvio que por la repetición de idéntico proceso, será posible expresar cualquier $K_5{}^n = n(n-5)\,(n-6)\,(n-7)/24$ como suma de los $K_4{}^i$ hasta incluir el $i = n-2$. A su vez podremos expresar cada uno de estos $K_4{}^i$ en series de sumandos que son funciones lineales de n, como en el caso anterior.

En general cualquier $K_c{}^n$ lo podríamos expresar finalmente, por el mismo proceso de iteración, como *sumas de series que son funciones lineales de n.* Ya que un $K_c{}^n$ cualquiera es de por sí función de n de grado $c-1$, las sucesivas repeticiones nos permitirán expresar al fin estas funciones de n de grado algebraico $(c-1)$-vo, como sumas de sus funciones lineales (de grado algebraico 1).

Esto es posible que tenga aplicación útil en el estudio de la alta aritmética y del álgebra, cuyos principales objetivos son los de hallar paralelamente relaciones multiplicativas y aditivas en algún campo determinado de los números.

San Juan de Puerto Rico, 15 de noviembre de 1946.