REMARQUES SUR UN THEOREME DE S. BERNSTEIN

par G. VALIRON (*)

Dans ses Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle (1) S. Bernstein a énoncé diverses propositions que contiennent la suivante:

Si une fonction réelle $f(x)$ de la variable réelle x admet les dérivées de tous les ordres sur un segment (a, b) et si $f(x)$ et ses dérivées d'ordre pair son toutes positives ou nulles sur ce segment, $f(x)$ est analytique dans l'intervalle (a, b).

Le but de cette note est de rattacher directemente cette proposition à la formule de Taylor - Lagrange et de la préciser. L'énoncé obtenu permet de simplifier dans les cours certaines démonstrations, notamment celle relative au développement en série entière de $(1+x)^m$. Nous établions que:

Si $f(x)$ est positive ou nulle, ainsi que ses dérivées d'ordre pair pour $|x| \leqq a$, $f(x)$ est développable en série entière pour $|x| < a$.

Introduisons la fonction

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$

qui est paire et positive, et dont les dérivées d'ordre pair son positives. Les dérivées d'ordre impair étant nulles à l'origine, la formule de Taylor-Lagrange permet d'écrire

(*) Expuesto por el autor en la reunión realizada por la Unión Matemática Argentina el 13 de setiembre de 1946.

(1) GAUTHIER VILLARS, París, 1926. Voir p. 193 et suivantes. Voir aussi Math. Annales, 1914.

$$g(\alpha)=g(0)+\frac{\alpha^2}{2}g''(0)+\ldots+\frac{\alpha^{2p}}{(2p)!}g^{(2p)}(0)+R_{2p+2}$$

avec

$$R_{2p+2}=\int_0^{\alpha}\frac{(\alpha-t)^{2p+1}}{(2p+1)!}g^{(2p+2)}(t)\,dt,$$

et l'on a, après les hypothèses,

$$(1)\qquad R_{2p+2}\leqq g(\alpha).$$

Pour $|x|<\alpha$, on a de même,

$$g(x)=g(0)+\frac{x^2}{2}g''(0)+\ldots+\frac{x^{2p}}{(2p)!}g^{(2p)}(0)+r_{2p+2}(x)$$

où

$$r_{2p+2}(x)=\int_0^{x}\frac{(x-t)^{2p+1}}{(2p+1)!}g^{(2p+2)}(t)\,dt.$$

La fonction $r_{2p+2}(x)$ est paire. En écrivant, pour $0<x<\alpha$ et $0\leqq t\leqq x$,

$$(\alpha-t)\leqq\frac{x-t}{\alpha-t}(\alpha-t)\leqq\frac{x}{\alpha}(\alpha-t)$$

on voit que

$$r_{2p+2}(x)<\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{2p+1}\int_0^{x}\frac{(\alpha-t)^{2p+1}}{(2p+1)!}g^{(2p+2)}(t)\,dt<\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{2p+1}R_{2p+2}$$

donc, d'après (1), $r_{2p+2}(x)$ tend vers zéro lorsque p croît indéfiniment. Si $|x|<\alpha$, $g(x)$ est développable en série entière

$$(2)\qquad g(x)=g(0)+\ldots+\frac{x^{2p}}{(2p)!}g^{(2p)}(0)+\ldots$$

Appliquant la formule de Taylor à $f(x)$, on a

$$(3) \qquad f(x)=f(0)+xf'(0)+\dots+\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}f^{(2p+1)}(0)+\rho_{2p+2}(x)$$

avec

$$\rho_{2p+2}(x)=\int_0^x \frac{(x-t)^{2p+1}}{(2p+1)!}f^{(2p+2)}(t)\,dt.$$

Et, puisque

$$0 \leqq f^{(2p+2)}(t) \leqq g^{(2p+2)}(t),$$

on a

$$|\rho_{2p+2}(x)| \leqq r_{2p+2}(x).$$

Dans la formule (3), le reste tend donc vers zéro lorsque p croît indéfiniment; $f(x)$ est développable en une série obtenue an groupant les termes en x^{2p} et x^{2p+1}. Mais comme la série converge, et comme $f^{(2p)}(0) \leqq g^{(2p)}(0)$, on peut ne pas faire ce groupement, et la proposition énoncée est établie.

La proposition reste évidemment vraie si les dérivées de même parité sont toutes de même signe à partir d'un certain rang pour $|x|<\alpha$. C'est le cas pour $(1+x)^m$ et $|x|<1$. On obtient sans calculs la formule du binôme.

Lorsque toutes les dérivées d'ordre pair de $f(x)$ sont positives ou nulles pour $x>0$, la fonction $f(x)$ est fonction holomorphe de la variable complexe x lorsque la partie réelle de x est positive. Des séries du type de Dirichlet

$$F(x)=\Sigma\, c_q e^{-\lambda_q x}$$

où les c_q et λ_q son positifs rentrent dans ce cas, et la fonction $F(x)$ peut admettre comme coupure l'axe des quantités imagiginaires. Si $f(x)$ et ses dérivées paires sont positives quel que soit x réel, $f(x)$ est une fonction entière. Les fonctiones entières paires dont le développement taylorien a ses coefficients positifs ou nuls rentrent dans ces cas, ainsi que les fonctions définies par

$$F(x) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q e^{\lambda_q x}$$

où les c_q sont positifs et les λ_q réels, et où la série

$$\Sigma\, c_q e^{|\lambda_q x|}$$

converge quel que soit x. Si les λ_q son, en outre, positifs, $F(x)$ et toutes ses dérivées sont positives, mais l'ordre de $F(x)$ est au moins égal à un.