LAS SUPERFICIES DE PETERSON (1).

por María C. Fassina

Las superficies de Peterson están caracterizadas por la propiedad de poseer un doble sistema de líneas planas conjugadas, de las cuales un sistema, el de los perfiles meridianos, pertenece a los planos que pasan por una recta fija r (llamada eje de la superficie) y el otro sistema, el de las líneas de nivel, pertenece a los planos perpendiculares a dicho eje.

Como en cualquier superficie las líneas de tangentes conjugados de los perfiles meridianos, respecto de una recta r, son las curvas de contacto de los conos circunscriptos de los puntos de r a la superficie (König), se puede también decir que las superficies de Peterson están caracterizadas por esta propiedad: que las tangentes a los perfiles meridianos en los puntos de una línea de nivel forman un cono con el vértice sobre el eje r.

Evidentemente son casos particulares de las superficies de Peterson: las superficies conoidales rectas, en las cuales los perfiles meridianos y las líneas de nivel coinciden en las generatrices (asintóticas); las superficies de rotación con sus ejes, y también las cuádricas con respecto de uno cualquiera de sus tres ejes.

Considerando el eje de las superficies de Peterson por eje oz, se consigue fácilmente la ecuación de derivadas parciales de segundo orden característica de estas superficies, expresando que sus perfiles meridianos son conjugados de las líneas de nivel.

(1) La primera parte expositiva de este trabajo se basa en la Memoria del Prof. Luigi Bianchi, titulada: "Le congruenze rettilinee infinite volte di rotolamento e le superficie di Peterson". Accademia dei Lincei, 1916. Aunque gran parte de esta exposición sea quizás conocida del lector, será útil para muchos conocer sistemáticamente esta teoría, que no suele figurar en los tratados de Geometría diferencial.

Siendo:

1) $$x : y = dx : dy$$

la ecuación diferencial de los perfiles meridianos y:

2) $$q : -p = dx : dy$$

la ecuación diferencial de las líneas de nivel, la condición que los perfiles meridianos sean conjugados de las líneas de nivel está expresada por la ecuación diferencial de 2.º orden:
$(r\,dx + s\,dy)\,\delta x + (s\,dx + t\,dy)\,\delta y = 0$
a la cual, substituyendo a los diferenciales dx, y dy, δx y δy los valores expresados por las fórmulas (1) y (2), se puede dar la forma:

3) $$q(rx + sy) = p(sx + ty).$$

Con coordenadas cilíndricas ρ, ϑ, z la ecuación de términos finitos de las superficies de Peterson, se obtiene haciendo:

$$x = \rho \cos\vartheta ; \quad y = \rho \operatorname{sen}\vartheta ; \quad z = \rho \operatorname{tg}\vartheta$$

donde ϑ y z son variables independiente, es decir las líneas coordenadas sobre la superficie son los perfiles meridianos y las líneas de nivel, con lo cual ρ resultará función de ϑ y z.

La (1) se transformará en la ecuación de derivadas parciales de ρ:

$$\frac{\delta^2\rho}{\delta z\delta\vartheta} = \frac{1}{\rho}\frac{\delta\rho}{\delta z}\frac{\delta\rho}{\delta\vartheta}$$

de la cual resulta que la ecuación de la superficie de Peterson más general, se puede escribir en coordenadas cilíndricas:

4) $$\rho = Z\,\Theta$$

donde Z es una función arbitraria de z, y Θ es una función arbitraria de ϑ.

Se puede observar que las líneas de nivel $z = \text{const.}$ proyectadas ortogonalmente sobre el plano xy, dan curvas homotéticas; y análogamente los perfiles meridianos $\vartheta = \text{const.}$, son curvas afines con el eje oz por eje de afinidad.

Para definir geométricamente una superficie de Peterson basta considerar arbitrariamente una línea de nivel y un perfil meridiano, que se encuentren en un punto, determinando así las dos funciones arbitrarias de las cuales depende la superficie dada S.

Si el parámetro $u = \text{const.}$ representa las líneas de nivel y $v = \text{const.}$ los perfiles meridianos, las ecuaciones paramétricas de las superficies de Peterson se pueden escribir:

$$x = U v; \quad y = U V; \quad z = u \tag{5}$$

donde U e V son funciones arbitrarias respectivamente del solo parámetro u y del solo parámetro v.

Propiedades de las superficies de Peterson

Sabemos que el cuadrado del elemento lineal esférico representativo está expresado por la ecuación:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Por medio de las (5) vamos a calcular los coeficientes E, F, G; tendremos:

$$\begin{gathered} E = U'^2(v^2 + V^2) + 1; \quad F = UU'(v + VV'); \\ G = U^2(1 + V'^2); \quad EG - F^2 = U^2U'^2(VV' - V)^2 + U^2(1 + V'^2). \end{gathered} \tag{6}$$

Excluyendo el caso de las superficies de rotación, en las cuales:

$$v^2 + V^2 = \text{const.}; \quad v + VV' = 0,$$

determinemos las trayectorias ortogonales de las líneas de nivel

$u = \text{const.}$, y de los perfiles meridianos $v = \text{const.}$, con las respectivas ecuaciones diferenciales:

$$F\,du + G\,dv = 0; \quad E\,du + F\,dv = 0.$$

Substituyendo las fórmulas (6) se obtendrá para la primera:

$$UU'(v + VV')\,du + U^2(1 + V'^2)\,dv = 0$$

en la cual se separan enseguida las variables:

$$\frac{U'}{U}du + \frac{1+V'^2}{v+VV'}dv = 0$$

y para la segunda:

$$\{U'^2(v^2 + V^2) + 1\}\,du + UU'\,(v + VV')\,dv = 0$$

que se puede escribir:

$$\frac{2}{UU'}\{U'^2(v^2 + V^2) + 1\}\,du + 2(v + VV')\,dv = 0$$

y en la que poniendo: $v^2 + V^2 = \phi$ asume la forma lineal de 1er orden:

$$\frac{2}{UU'}(U'^2\phi + 1) + \frac{d\phi}{du} = 0$$

que se puede integrar por cuadraturas.

Se puede entonces enunciar la siguiente propiedad:

«En toda superficie de Peterson las trayectorias ortogonales de las líneas de nivel y las de los perfiles meridianos se pueden obtener con cuadraturas».

Otra propiedad notable del sistema conjugado, formado por los perfiles meridianos y las líneas de nivel de una superficie de Peterson se obtiene considerando los coeficientes de la segunda forma fundamental D, D' y D'':

$$D = -\frac{UU''(vV'-V)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$D' = 0$$

$$D'' = \frac{U^2V''}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

La segunda de estas relaciones significa la conocida propiedad que el sistema (uv) es conjugado; y observando que $\frac{D}{D''}$ es el cociente de una función de u por una función de v, se encuentra que cambiando convenientemente los parámetros u, v, se pueden hacer iguales en valor absoluto los coeficientes D, D''. Se encuentra así la siguiente propiedad:

«Los perfiles meridianos y las líneas de nivel de una superficie de Peterson forman un sistema isotermo conjugado».

La más importante propiedad de estas superficies está expresada por el teorema de Peterson:

«Cada superficie de Peterson es aplicable sobre ∞' superficies de la misma especie, de manera que los perfiles meridianos y las líneas de nivel de una se superponen respectivamente sobre los perfiles meridianos y las líneas de nivel de la otra».

Peterson ha dado las fórmulas que determinan los ∞' deformadas de una superficie de Peterson, que dependen de una constante arbitraria K, en la siguiente manera:

Sea la superficie S de Peterson definida en coordenadas cilíndricas de la ecuación:

$$\rho = Z\Theta.$$

Se tiene entonces por el cuadrado del elemento lineal esférico representativo:

7) $$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + dz^2$$

siendo: $\rho = \frac{z}{\operatorname{tg} \vartheta}$ se tiene:

$$d\rho = \frac{z' \operatorname{tg} \vartheta \, dz - z \frac{1}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta}{\operatorname{tg}^2 \vartheta} = \frac{z' dz}{\operatorname{tg} \vartheta} - \frac{z}{\operatorname{sen}^2 \vartheta} d\vartheta$$

de la cual:

$$d\rho^2 = Z' \Theta \, dz + Z \Theta' \, d\vartheta)^2$$

sustituyendo en la fórmula (7) y reduciendo se obtiene:

$$ds^2 = (1 + Z'^2 \Theta^2) \, dz^2 + 2 Z Z' \Theta \Theta' \, dz \, d\vartheta +$$
$$+ Z^2 (\Theta'^2 + \Theta^2) \, d\vartheta^2.$$

Si indicamos con ρ_1, ϑ_1, z_1 las coordenadas cilíndricas del punto de una deformada S_1 correspondiente al punto de S de coordenadas (ρ, ϑ, z) se tendrá:

8) $$\rho_1 = Z \sqrt{\Theta^2 + k}; \quad z_1 = \int \sqrt{1 - k Z'^2} \, dz$$
$$\Theta_1 = \int \frac{\sqrt{\Theta^4 + k (\Theta'^2 + \Theta^2)}}{\Theta^2 + k} \, d\vartheta$$

con k connstante arbitraria; y se puede obtener enseguida:

$$ds^2 = d\rho_1{}^2 + \rho_1{}^2 d\vartheta_1{}^2 + dz_1{}^2.$$

Queda así demostrado que cada superficie de Peterson es aplicable sobre ∞' superficie de la misma especie, que dependen de la constante arbitraria k, de manera que los perfiles meridianos y las líneas de nivel de la primera se superponen sobre los perfiles meridianos y las líneas de nivel de la otra respectivamente.

El perfil meridiano de la superficie de Peterson se deforma según las (8), independientemente de la forma de la línea de nivel, como en el caso del meridiano de una superficie de rotación.

Si en las (8) se pone $\Theta = \text{const.}$, las mismas se transforman en las fórmulas que dan las ∞' superficies de rotación aplicables sobre una superficie dada.

Superficies de Peterson particulares

Considerando la hipótesis que la superficie S, admita otro eje de Peterson incidente y ortogonal con el primero (por ejemplo, el eje de las x), es decir que los perfiles meridianos $x = \text{const.}$ sean conjugados a las líneas de nivel $x = \text{const.}$, la doctora París, partiendo de las ecuaciones (5) de una superficie de Peterson general, encontró la ecuación:

$$9) \qquad -UU''(vV'-V)\frac{V'}{vV} - U'V''\left(\frac{U}{u} - U'\right) = 0$$

de la cual deduce las ecuaciones paramétricas siguientes:

$$x = \sqrt[1-k]{C_1 u^{1-k} + C_2 v}$$

con C_1 y C_2 constantes arbitrarias, e

$$y = \sqrt[1-k]{C_1 u^{1-k} + C_3}\ \sqrt[1-k]{C^1 v^{1-k} + C}$$

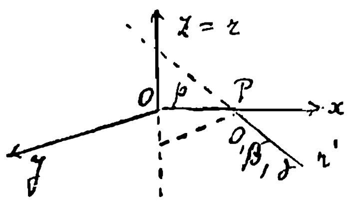
$$z = u.$$

Expresando finalmente para la superficie S la existencia de un tercer eje de Peterson incidente con los dos considerados en su punto común y ortogonal con ellos (el eje de las y), encuentra la misma ecuación diferencial (9), que le permite enunciar la siguiente propiedad:

«Una superficie de Peterson que admita dos ejes distintos incidentes y ortogonales, admite también un tercer eje, incidente y ortogonal a los dos primeros».

Superficies de Peterson con dos ejes alabeados

Busquemos la condición para que existan superficies de de Peterson con dos ejes distintos alabeados:



Sean r y r' estos dos ejes. Consideramos uno de ellos, por ejemplo r como eje de las z del sistema de ejes cartesianos ortogonales de referencia y como eje de las x la recta que contiene el segmento $OP = p$, que da la mínima distancia de las dos rectas dadas.

Serán entonces $0, \beta, \gamma$ los cosenos directores del segundo eje r'.

Para tener la ecuación de un plano:

$$Kx + By + Cz + D = 0$$

que pase por la recta r', habrá que hacer:

$$B = \gamma; \quad C = -\beta; \quad D = -Kp$$

obteniendo:

$$\frac{\gamma y - \beta z - Kp}{x} = -K$$

donde K es un parámetro arbitrario que da los planos que pasan por la recta r'. La ecuación de un plano normal a r' será:

$$\beta y + \gamma z = h$$

con h constante.

Sustituyendo a x, y, z las ecuaciones paramétricas de una superficie de Peterson expresadas por las fórmulas (5) se obtiene como ecuación de un perfil meridiano correspondiente a la recta r':

$$\frac{\gamma UV-\beta u-Kp}{Uv}=-K$$

o sea eliminando el parámetro K:

$$\frac{\gamma UV-\beta u}{Uv-p}=\text{const.} \tag{10}$$

y por ecuación de una línea de nivel:

$$\beta UV+\gamma u=\text{const.} \tag{11}$$

Diferenciamos las dos ecuaciones (10) y (11), indicando con du, dv los diferenciales considerados a lo largo de un perfil meridiano, y con $\delta u, \delta v$ aquellos considerados a lo largo de una línea de nivel:

De la (10) tendremos:

$$\frac{\gamma U'V du-\beta du+\gamma UV'dv)(Uv-p)-(\gamma UV-\beta u)(U'vdu+Udv)}{(Uv-p)^2}=0$$

de la cual:

$$[(\gamma U'V-\beta)(Uv-p)-(\gamma UV-\beta u)U'v]\,du=$$

$$=[(\gamma UV-\beta u)U-\gamma UV'(Uv-p)]\,dv$$

y desarrollando:

$$(\gamma U'VUv-\gamma pU'V-\beta vU+\beta p-\gamma vUU'V+\beta uVU')\,du$$

$$=(\gamma U^2V-\beta uU-\gamma U^2vV'+\gamma pUV')\,dv$$

que se puede escribir:

$$[\beta v(U'u-U)+\beta p-\gamma pU'V]\,du= \tag{12}$$

$$[-\gamma U^2(V'v-V)-\beta uU+\gamma pU'V]\,dv,$$

ecuación diferencial correspondiente a un perfil meridiano.
Derivando la (11) se tendrá a lo largo de una línea de nivel:

$$13)\qquad (\beta\, U'V + \gamma)\, \delta u = -\beta\, UV'\, \delta v.$$

Multiplicando miembro a miembro la (12) y la (13) se obtiene:

$$14)\qquad [\beta v(U'u-U) + \beta p - \gamma p U'V]\,(\beta\, U'V + \gamma)\, du\, \delta u =$$
$$= -[-\gamma\, U^2(V'v-V) - \beta u U + \gamma p U V']\, \beta\, UV'\, dv\, \delta v.$$

Establecemos la condición para que las líneas de nivel y los perfiles meridianos anteriores sean conjugados escribiendo:

$$15)\qquad D\, du\, \delta u = -D''\, dv\, \delta v$$

donde D y D'' son los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie de Peterson, y tienen los valores:

$$16)\qquad D = -UU''(V'v-V)$$
$$D'' = U^2 V''.$$

De la (16) se tiene:

$$\frac{D}{D''} = -\frac{U''(V'v-V)}{UV''}$$

y de la (14)

$$\frac{-dv\,\delta v}{du\,\delta u} = \frac{[\beta v(U'u-U)+\beta p-\gamma p U'V](\beta U'V+\gamma)}{[\gamma p UV'-\gamma U^2(V'v-V)-\beta u U]\beta UV'}$$

teniendo presente la condición (15) se obtiene:

$$UV''(\beta\, U'V + \gamma)\, [\beta\, V(U'u-U) + \beta p - \gamma p\, U'V] =$$
$$= -\beta\, UU''V'(V'v-V)[\gamma p\, UV' - \gamma\, U^2(V'v-V) - \beta u\, U].$$

Así la condición (14), a la cual tienen que satisfacer las funciones $U(u)$ y $V(v)$ será:

$$(17)\qquad V''(\beta\, U'V+\gamma)\,[\beta v(U'u-U)+\beta p-\gamma p\, U'V]=$$

$$=\beta\, UU''V'(V'v-V)\,[\gamma\, U(V'v-V)-\gamma p\, V'+\beta\, u].$$

Efectuando los productos en la ecuación precedente, resulta la suma de productos de funciones de u por funciones de v, que se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{i=8} \varphi_i(u)\, \psi_i(v)=0$$

que representa la condición para que una superficie de Peterson de ecuaciones paramétricas:

$$x=Uv;\quad y=UV;\quad z=u$$

tenga dos ejes de Peterson alabeados r y r', uno considerado como eje de las z, y el otro de cosenos directores $0, \beta, \gamma$.

Como verificación se puede estudiar el caso $\beta=1$, $\gamma=0$ y $p=0$, que corresponde al caso en el cual los dos ejes son ortogonales e incidentes.

La ecuación (17) se reduce a:

$$V''U'V\,[v(U'u-U)]=UU''V'(V'v-V)\,u$$

que dividiendo los dos miembros por $u\,v\,V$, se puede escribir:

$$-UU''(V'v-V)\,\frac{V'}{vV}-U'V''\left(\frac{U}{u}-U'\right)=0$$

que es la ecuación (9) encontrada por la doctora París.