SOBRE LA TRANSFORMACION DE HILBERT

por Oscar A. Varsavsky

Es objeto de esta nota señalar la relación existente entre la conocida transformación de Hilbert: $H\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\oint\frac{\varphi(t)dt}{t-x}$ (el símbolo $\oint$ significa integral a valores principales) y el operador signo: $S\varphi(x)=\operatorname{sgn}(x)\,\varphi(x)$, lo que permite volver a encontrar de una manera sencilla y que no depende de la teoría de funciones analíticas, las propiedades de dicha transformación. Se verá que los resultados sólo se demuestran aquí para un conjunto de funciones denso en L^2, pero esta restricción en las funciones queda compensada por una amplia generalización en sus argumentos.

I. - *El operador signo.*

Sea S un operador definido para toda función compleja de variable real $\varphi(x)$ mediante la fórmula:

$$S\varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{para } x>0\\ -\varphi(x) & \text{para } x<0\end{cases}$$

(en el origen puede tomarse cualquiera de ambas posibilidades, o el valor cero, como al multiplicar por la función $\operatorname{sgn}(x)$).

1) S es lineal y acotado. $\varphi(x)\in L^p$ implica $S\varphi(x)\in L^p$, pues $|\varphi(x)|=|S\varphi(x)|$. En este sentido S es una transformación continua de cada espacio L^p en sí mismo. Pero en lo sucesivo supondremos exclusivamente que $\varphi(x)\in L^2$, es decir, tomamos funciones de un espacio de Hilbert.

2) $S^2=I$ ($=$identidad), o sea $S=S^{-1}$.

Si (φ, ψ) representa el producto interno de dos funciones, es decir $(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, . \, \overline{\psi}(x) . dx$, se verifica $(S\varphi, \psi) = (\varphi, S\psi)$ o sea, S es autoadjunto: $S = S^*$ (en sentido estricto, pues su dominio es todo el espacio), y unitario: $S^* = S^{-1}$.

3) La ecuación característica, $S\varphi = a\varphi$ sesatisface para $a = \pm 1$.

Al autovalor $+1$ corresponden las funciones nulas para $x < 0$ (según la definición de S adoptada en el origen habrá o no que añadir este punto); al autovalor -1 corresponden las funciones nulas para $x > 0$ (con la misma salvedad).

Llamando P y P' a los operadores proyección cuyas multidades m_P y $m_{P'}$ están formadas por las funciones nulas a la izquierda y a la derecha del origen, respectivamente, se cumple:

$$P + P' = I; \qquad P - P' = S$$

$$S = 2P - I \text{ (Ecuación de las involuciones).}$$

4) En m_P las funciones de Laguerre $l_n(x)$ forman un sistema ortonormal completo, y lo mismo ocurre en $m_{P'}$ con las $l_n(-x)$. Por lo tanto entre ambos sistemas se obtiene una base invariante para el operador S, que indicaremos con $\{l_n(x)\}$; $n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$; $l_{-|n|}(x) = l_{|n|}(-x)$.

II. *El operador de Fourier.*

Sea F el operador definido para las funciones complejas de variable real $\varphi(x) \in L^2$ mediante la fórmula

$$F\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \, e^{ixt} \, dt$$

(en promedio cuadrático. Si se necesita convergencia puntual puede adoptarse como definición: $F\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \frac{e^{ixt} - 1}{it} dt$).

1) F es unitario:

$$F^*\varphi(x) = F^{-1}\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \, e^{-ixt} \, dt.$$

Sus autovalores son ± 1, $\pm i$; y las funciones de Hermite $h_n(x)$ son autofunciones.

2) Cuando se lo define en grupos topológicos transforma funciones del grupo en funciones del correspondiente grupo dual o de caracteres (en el caso de la recta ambos coinciden). Esta propiedad es esencial.

3) $F^2\varphi(x) = \varphi(-x)$, en L^2. $F^2 = F^{-2}$ es unitario y autoadjunto. Sus autovalores son 1 (corresponde a las funciones pares), y -1 (para las impares).

III. *El operador de Hilbert.*

Sea H' el operador conjugado de S mediante F, es decir: $H' = F^{-1}SF$. Llamaremos operador de Hilbert a $H = -iH'$.

$$1)\quad H\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$$

en el siguiente sentido:

$$H\varphi(x) = -iF^{-1}SF\varphi(x) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^\infty e^{-ixt} F\varphi(t)\, dt - \right.$$

$$\left. -\int_{-\infty}^0 e^{-ixt} F\varphi(t)\, dt \right\} = \frac{-i}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi(u) \left[e^{it(u-x)} - e^{-it(u-x)} \right] dt\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \varphi(u) \operatorname{sen} t(u-x)\, dt\, du.$$

Esta última expresión es la «integral aliada» (de la similar con coseno en lugar de seno, llamada fórmula de la integral de Fourier). Para $\varphi(x) \in L^1$ es sumable (C, α), $\alpha > 0$ a

$$\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$$

en casi todo punto (ver, p. ej. [5], teor. 107).

Como $L^1 \cap L^2$ es denso en L^2, no nos preocupa extender la equivalencia de ambas expresiones a todo el espacio L^2.

Este resultado parecería contradecir el teorema de v. Neumann, que dice: «Condición necesaria y suficiente para que un operador autoadjunto en L^2 pueda representarse mediante un operador integral, es que cero sea punto de acumulación de su espectro», [4], pues H' no satisface esta condición. Pero $\frac{i}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$ no es un verdadero operador integral, sino el límite de la suma de dos operadores integrales: $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right\} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$

2) $S = FH'F^{-1} = iFHF^{-1}$.

$FH = -iSF$. Este resultado se ha utilizado en la demostración de varios teoremas (ver [5], fórmula 5.1.8 y teors. 90 y 91).

3) Por ser conjugado unitario de S, H' es también unitario y autoadjunto y tiene los mismos autovalores: ± 1. Los de H son, respectivamente $\mp i$.

4) Si $f(x)$ es autofunción de S, $F^{-1}f(x)$ lo es de H' y H.

Si $\varphi(x)$ es autofunción de H' (y por lo tanto de H), $F\varphi(x)$ lo es de S.

Es decir $H\varphi = -i\varphi$ y $PF\varphi = F\varphi$ son condiciones equivalentes (lo mismo vale para $H\varphi = i\varphi$ y $P'F\varphi = F\varphi$).

Esto corresponde al importante teorema: «Son condiciones equivalentes: a) que la transformada de Fourier de una función de L^2 se anule a la izquierda (o a la derecha) del origen, y b) que sus partes real e imaginaria sean transformadas de Hilbert una de otra». (Ver p. ej. [5], teor. 95).

Pues si $\varphi(x) = f(x) + ig(x)$ es autofunción de H del autovalor $-i$, se tendrá:

$$H\varphi = Hf + iHg = -i(f+ig).$$

y como $Hf(x)$ es real si lo es $f(x)$, como lo muestra la propiedad 1), podemos igualar partes reales e imaginarias:

$$Hf(x) = g(x)$$

$$Hg(x) = -f(x);$$

y por otra parte $PF\varphi = F\varphi$ significa que $F\varphi \in mp$, es decir, es nula a la izquierda del origen. Lo análogo (con un cambio de signo en las fórmulas de transformación) vale para el otro autovalor.

5) Como las funciones $l_n(x)$, ver I, 4), constituyen un sistema ortonormal completo de autofunciones de S, sus transformadas de Fourier

$$F^{-1} l_n(x) = k_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(x-i)^n}{(x+i)^{n+1}}; \qquad n = \ldots -1,\ 0,\ 1, \ldots$$

formarán un sistema ortonormal completo invariante con respecto a H y H'.

Este es un resultado de Hille [3].

6) Así como S, H' puede representarse mediante $H' = 2N - I$, siendo N un operador proyección definido por:

$$N\varphi(x) = \frac{1}{2}(I + H') = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{i}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)dt}{t-x}$$

y si representamos al operador unidad mediante la delta de Dirac obtendremos:

$$N\varphi(x) = \frac{1}{2} \oint_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[\delta(t-x) + \frac{i}{\pi} \frac{1}{t-x} \right] dt,$$

cuyo núcleo es la delta compleja (ver [1]).

Si definimos

$$N'\varphi(x) = \frac{1}{2} \oint_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \left[\delta(t-x) - \frac{i}{\pi} \frac{1}{t-x} \right] dt = \frac{1}{2}[I - H']$$

valdrá:

$$N' + N = I; \qquad N - N' = H'.$$

Como es evidente, $N=F^{-1}PF$, de modo que la aplicación de la delta compleja a una función, equivale, en el espacio conjugado según F, a igualar a cero la función en el semieje negativo (positivo para N').

Como cero es punto de acumulación del espectro N y N', el teorema de v. Neumann antes citado indica que, previa una transformación unitaria apropiada ,ha de ser posible expresar a estos operadores como integrales.

Por el mismo camino seguido en III, 1 para H, se obtiene para N la siguiente representación:

$$N\varphi(x)=\frac{i}{2\pi}\oint_0^\infty\left[\frac{\varphi(u)}{u-x}-\frac{\varphi(-u)}{u+x}\right]du=\frac{i}{2\pi}$$

$$\left\{\oint_0^\infty\frac{x[\varphi(u)+\varphi(-u)]}{u^2-x^2}\,du+\oint_0^\infty\frac{u[\varphi(u)-\varphi(-u)]}{u^2-x^2}\,du\right\}$$

es decir, una combinación de las fórmulas de Hilbert para funciones pares e impares.

7) Introduzcamos los operadores autoadjuntos X y D definidos por:

$$X\varphi(x)=x\,\varphi(x)\,;\qquad D\,\varphi(x)=i\,\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

y cuyos dominios son densos en L^2.

Como es sabido, se cumple $D=F^{-1}XF$, y entonces:

$$H'D=F^{-1}S\,F\,D=F^{-1}S\,X\,F$$

$$D\,H'=F^{-1}X\,F\,H'=F^{-1}X\,S\,F.$$

Como es inmediato que $SX=XS$, resulta que H' y H conmutan con la derivación ,lo cual era de preverse por la forma del núcleo de la transformación de Hilbert (ver p. ej. [6]).

La relación de conmutación con X puede obtenerse utilizando la fórmula $SF^{\pm 2}=-F^{\pm 2}S$, que se deduce fácilmente recordando (ver II, 3)) que $F^2\varphi(x)=F^{-2}\varphi(x)=\varphi(-x)$.

Entonces:

$$H' X = F^{-1} S F^2 D F^{-1} = -F S D F^{-1}$$

$$X H' = F D F^2 S F = -F D S F^{-1}.$$

Ahora bien; $DS \varphi(x) = SD \varphi(x)$ para $x \neq 0$, pero no en el origen, a menos que la función sea allí nula. Sólo entonces podrá deducirse $HX = XH$.

La fórmula de Hilbert nos indica por otra parte:

$$H'X \varphi(x) = \frac{i}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{u\varphi(u)}{u-x} du = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du + \frac{ix}{\pi}$$

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u) du}{u-x} = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du + XH' \varphi(x).$$

o sea, la condición de conmutación es: $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du = 0$, pero esto también es exigido por la continuidad de la transformación de Fourier cuando $\varphi(x) \in H^1 \cap H^2$ (clases de Hardy). (Pues $\varphi(x) = N\varphi(x) + N'\varphi(x)$: $FN\varphi(x) = 0$ para $x < 0$, y por continuidad para $x = 0$; $FN'\varphi(x) = 0$ para $x > 0$, y por continuidad para $x = 0$; es decir $F(N+N') \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)\, du = 0$).

Nótese que esta condición equivale a que en el espacio conjugado según F las funciones sean nulas en el origen, o sea el criterio de conmutación para S y D.

8) Del hecho que el operador signo da el mismo resultado aplicado a un producto o a uno solo de sus factores:

$$S[f(x) \,.\, g(x)] = g(x) \,.\, Sf(x) = f(x) \,.\, Sg(x),$$

se deduce la misma propiedad para el operador de Hilbert con respecto al producto transformado, o sea la convolución:

$$H[f(x) * g(x)] = f * Hg = g * Hf,$$

$$(f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z-t) \cdot g(t)\, dt).$$

En efecto, recordando que el teorema de la convolución expresa:

$$F[f * g] = Ff \cdot Fg, \text{ o también: } F^{-1}[f * g] = F^{-1} f \cdot F^{-1} g,$$

se tendrá:

$$H[f * g] = HF^{-1}[Ff \cdot Fg] = -iF^{-1}S[Ff \cdot Fg] =$$

$$= -iF^{-1}[SFf \cdot Fg] = -iF^{-1}SFf * g = Hf * g.$$

Este resultado se halla p. ej. en [5], no restringido al espacio L^2 como aquí ([5] teor. 104). En cambio podemos generalizarlo automáticamente para más de dos factores:

$$H[f_0 * f_1 * \ldots * f_n] = Hf_0 * f_1 * \ldots * f_n = f_0 * Hf_1 * \ldots * f_n = \ldots$$

donde

$$f_0 * f_1 * \ldots * f_n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(u_n)\, du_n$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{n-1}(u_{n-1})\, du_{n-1} \ldots \int_{-\infty} f_1(u_1)\, f_0(x-u_1-\ldots-u_n)\, du_1.$$

Corolario:

$$Hf * Hg = -f * g;\; Hf * Hg * Hk = -H[f * g * k], \text{ etc.}$$

IV. - *El operador de Hilbert generalizado.*

1) Sea S_λ el operador definido por:

$$S_\lambda \varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para } x > \lambda \\ -\varphi(x) & \text{para } x < \lambda \end{cases}$$

con las mismas consideraciones para $x = \lambda$ que para S en el origen.

Para todo λ, $-\infty<\lambda<\infty$, S_λ tiene propiedades análogas a las de S (al que ahora llamaríamos S_0), aunque por supuesto sus autofunciones están «corridas» en λ. Sus multiplicidades lineales características, m_{P_λ} y $m_{P'_\lambda}$ están determinadas por dos proyecciones, P_λ y P'_λ, definidas por:

$$P_\lambda \varphi(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{para } x>\lambda \\ 0 & \text{para } x<\lambda\end{cases} \quad ; \qquad P'_\lambda \varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{para } x>\lambda \\ \varphi(x) & \text{para } x<\lambda\end{cases}$$

de modo que $P_\lambda+P'_\lambda=I$; $P_\lambda-P'_\lambda=S_\lambda$.

Nótese que las P'_λ, $-\infty<\lambda<\infty$, forman una familia espectral bien conocida; la del operador X; es decir:

$$X=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dP'_\lambda=-\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dP_\lambda=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dS_\lambda.$$

Los S_λ conmutan entre sí.

2) Sea V_λ el operador «desplazamiento en λ», definido por:

$$V_\lambda \varphi(x)=\varphi(x+\lambda).$$

Los V_λ son operadores unitarios. Sus adjuntos son:

$$V^*_\lambda=V_{-\lambda}=V_\lambda^{-1}.$$

Sus espectros son continuos, salvo para $V_0=I$. Forman un grupo abeliano:

$$V_\lambda\,.\,V_\mu=V_{\lambda+\mu}=V_\mu\,.\,V_\lambda.$$

Es evidente que

$$S_\lambda=V_{-\lambda}\,.\,S\,.\,V_\lambda=V_\lambda^{-1}S\,V_\lambda$$

(es decir, equivale a correr el origen hasta λ, aplicar el operador S y llevar nuevamente el origen a su sitio).

Sea U_λ el conjugado de V_λ, según F: $U_\lambda=F^{-1}\,.\,V_\lambda\,.\,F$. Efectuando las operaciones indicadas se obtiene: $U_\lambda\,\varphi(x)=e^{i\lambda x}\,\varphi(x)$ y $U_\lambda^{-1}=e^{-iX}$, es decir, los U_λ forman también un grupo abeliano de operadores unitarios, cuya familia espectral es la misma que la del operador X (pues son funciones de éste). De aquí deducimos que la familia espectral de los V_λ es en esencia la misma que la del operador $D = i\dfrac{d}{dx}$.

3) Definiremos un «operador de Hilbert generalizado» H_λ mediante:

$$H_\lambda = -iH'_\lambda = -iF^{-1} S_\lambda F.$$

Entonces

$$H_\lambda = -iF^{-1} V_{-\lambda} S V_\lambda F = F^{-1} V_{-\lambda} F H F^{-1} V_\lambda F = U_\lambda^{-1} H U_\lambda.$$

Es decir que como operador integral a valores principales se tendría:

$$H_\lambda \varphi(x) = \frac{e^{-i\lambda x}}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda t}\varphi(t)}{t-x} dt$$

de modo que si $\psi(x)$ es autofunción de H, $e^{-i\lambda x}\psi(x)$ lo es de H_λ perteneciendo al mismo autovalor.

La descomposición de H_λ en proyecciones puede obtenerse definiendo N_λ y N'_λ mediante cualquiera de estas dos fórmulas:

$$N_\lambda = F^{-1} P_\lambda F; \quad N_\lambda = U_\lambda^{-1} N U_\lambda$$

y análogamente para N'_λ.

Entonces los dos grupos unitarios tienen las siguientes expresiones:

$$U_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda\nu} d P'_\nu; \qquad V_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\nu} d N'_\nu$$

y también es fácil verificar que:

$$-iD = \frac{d}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d N_\lambda = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d H_\lambda.$$

4) La relación entre la transformación de Hilbert y las funciones analíticas en un semiplano está dada por el siguiente teorema (ver [5] teor. 95): «Son condiciones equivalentes, a):

$F\varphi(x)=0$ para $x>0$ y b): $\varphi(x)=\lim\limits_{y\to 0}\varphi(x+iy)$, donde $\varphi(x+iy)$ es analítica en el semiplano $y>0$, y tal que $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^2\,dx=0$ (1) para todo y».

Existe un teorema análogo (ver [5] teor. 96) cuando $F\varphi(x)=0$ para $x>\lambda$, exigiéndose entonces $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^2\,dx=0\ (e^{2\lambda y})$.

Mostraremos la estrecha relación que hay entre ambos teoremas.

$F\varphi(x)=0$ para $x>\lambda$ significa que $F\varphi(x)$ es autofunción de S_λ; por lo tanto $\varphi(x)$ es autofunción de H_λ y $e^{i\lambda x}\varphi(x)$ lo es de H. Pero entonces $F[e^{i\lambda x}\varphi(x)]=0$ para $x>0$, y por el primer teorema:

$$0\ (1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|e^{i\lambda(x+iy)}\varphi(x+iy)|^2\,dx=e^{-2\lambda y}\int\limits_{-\infty}|\varphi(x+iy)|^2\,dx.$$

De la misma manera podría haberse demostrado el primer teorema a partir del segundo.

5) La misma propiedad de H_λ puede aplicarse a la caracterización de la transformada de Fourier de un «paquete de ondas». En Mecánica Cuántica, por ejemplo, se tiene un espacio de impulsos que es el transformado unitario según F del espacio de las coordenadas o de configuración del sistema (suponemos $h=2\pi$). Como los valores posibles del impulso están siempre acotados (pues la energía total disponible es finita), las funciones de onda en el espacio de impulsos deben anularse fuera de un cierto recinto. Limitándonos a un solo grado de libertad y recintos simétricos con respecto al origen tendríamos: $\psi(p)=0$ para $|p|>\lambda>0$. Pasando al espacio de configuración: $\varphi(q)=F^{-1}\psi(p)$ y por lo tanto $\varphi(q)$ es autofunción de H_λ y $H_{-\lambda}$, o sea $e^{\pm i\lambda q}\varphi(q)$ autofunciones de H para los autovalores $\pm i$, respectivamente

$$H[e^{i\lambda q}\varphi(q)]=ie^{i\lambda q}\varphi(q)$$

$$H[e^{-i\lambda q}\varphi(q)]=-ie^{-i\lambda q}\varphi(q).$$

Sumando y restando obtenemos como condiciones necesarias y suficientes para que una función $\varphi(q)$ sea la transformada de un paquete de ondas:

$$\begin{cases} H[\varphi(q)\cos\lambda q] = -\varphi(q)\operatorname{sen}\lambda q \\ H[\varphi(q)\operatorname{sen}\lambda q] = \varphi(q)\cos\lambda q. \end{cases}$$

Nótese que cualquiera de ellas implica la otra.

Es también inmediato que las mismas condiciones deben ser satisfechas por las partes real e imaginaria de $\varphi(q)$. Ahora bien; sean $f(q)$ y $g(q)$ dos funciones de L^2; se verifica:

$$\left.\begin{array}{l} FHf = -iSFf \\ FHg = -iSFg \end{array}\right\} \therefore FHf\,.\,\overline{FHg} = SFf\,.\,\overline{SFg} = Ff\,.\,\overline{Fg}$$

y aplicando la fórmula de Parseval se obtiene (ver [5] teor. 102):

$$\int_{-\infty}^{\infty} Hf(q)\,.\,\overline{Hg(q)}\,dq = \int_{-\infty}^{\infty} f(q)\,.\,\overline{g}(q)\,dq.$$

Este resultado aplicado a nuestras funciones $e^{\pm i\lambda q}\varphi(q)$ nos permite deducir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(q)|^2 e^{2i\lambda q}\,dq = -\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(q)|^2 e^{2i\lambda q}\,dq$$

o sea:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(q)|^2 e^{2i\lambda q}\,dq = 0$$

es condición necesaria para que $\varphi(q)$ sea la transformada F de un paquete de ondas contenido en el intervalo $(-\lambda, \lambda)$.

Recordando el teorema de la convolución:

$$F|\varphi(q)|^2 = F[F^{-1}\psi(p)\;\overline{F^{-1}\psi(p)}\;] = F[F^{-1}\psi(p)\,.\,F^{-1}\overline{\psi(-p)}]$$
$$= \psi(p) * \overline{\psi(-p)}$$

nuestra condición significa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi(p)} \cdot \psi(p+2\lambda)\, dp = 0$$

que por supuesto es necesaria pero no suficiente para que $\psi(p)$ sea un paquete de ondas. (Podrían ser, por ejemplo, varios paquetes de longitud menor que 2λ separados por intervalos de longitud mayor que 2λ).

Si consideramos paquetes contenidos en un intervalo (a, b) cualquiera en lugar del simétrico $(-\lambda, \lambda)$, obtendremos como condiciones:

$$H[(e^{iaq}+e^{ibq})\,\varphi(q)] = i(e^{ibq}-e^{iaq})\,\varphi(q)$$

o

$$H[(e^{ibq}-e^{iaq})\,\varphi(q)] = i\,(e^{ibq}+e^{iaq})\,\varphi(q).$$

Compárese por ejemplo con [2].

Ejemplo: Sea $\psi(p) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} & \text{para } |p| < \lambda \\ 0 & \text{para } |p| > \lambda. \end{cases}$ Entonces $F^{-1}\psi(p) = \dfrac{2 \operatorname{sen} \lambda q}{q}$ y debe cumplirse: $H\left[\dfrac{2 \operatorname{sen}^2 \lambda q}{q}\right] = -\dfrac{\operatorname{sen} 2\lambda q}{q}$, lo cual en efecto ocurre, como puede verificarse derivando con respecto al parámetro λ con lo que se obtiene la conocida relación:

$$H \cos 2\lambda q = -\operatorname{sen} 2\lambda q$$

(ver [5], pág. 121).

V. - *Nuevas generalizaciones.*

1) Como el operador de Fourier se aplica en espacios muy generales y el operador signo siempre es fácil de definir, podremos generalizar mucho el operador de Hilbert.

Sea G un grupo topológico conmutativo, localmente compacto, en el cual se ha definido una medida de Haar. Consideremos las funciones complejas $\varphi(x)$ en él definidas y de cuadrado del módulo integrable según dicha medida.

Sean $\psi(x)$ las funciones análogas en el grupo C de caracteres de G. La transformación de Fourier establece una correspondencia biunívoca entre ambos conjuntos de funciones.

Separemos los elementos de G o C en dos subconjuntos, A y $\bar{A}$ (su complementario), de igual medida si la medida total es finita, o ambos de medida infinita en caso contrario. Parece útil restringir las posibilidades exigiendo que, si $x \in \bar{A}$, $x^{-1} . \lambda \in A$, siendo λ un elemento fijo.

Definamos ahora un operador signo del siguiente modo:

$$Sf(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ -f(x) & \text{si } x \in \bar{A}. \end{cases}$$

Entonces el operador de Hilbert será:

$$H = -iF^{-1}SF.$$

Es decir, si se parte de G, se pasa al grupo de caracteres mediante la transformación de Fourier, allí se aplica el operador signo y se vuelve a G por la transformación de Fourier inversa.

Por lo tanto las propiedades de un operador de Hilbert dependen exclusivamente de las de un operador signo (y por supuesto de las de F). Los argumentos de las funciones para las cuales está definido el uno pertenecen al grupo de los caracteres del grupo topológico al que pertenecen los argumentos de las funciones para las cuales se define el otro.

Como hay mucha libertad para definir el operador signo puede obtenerse una gran variedad de transformaciones de Hilbert, todas las cuales poseen las propiedades 3) y 4) de III, que son las básicas.

2) Como ejemplo sencillo, sea G los números reales módulo 2π; C estará formado entonces por los enteros. Como medida, para G la de Lebesgue; C es discreto. En G consideramos las funciones de $L^2(-\pi, \pi)$ y en C los vectores $\{a_n\}$ de norma finita: $\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

De G a C se pasa mediante la transformación de Fourier:

$$F\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad (n \text{ entero})$$

y de C a G mediante:

$$F^{-1}\{a_n\} = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}.$$

El operador signo se define en ambos espacios:

$$\text{en } C\colon\ S\{a_n\} = \begin{cases} \{a_n\} & \text{para } n > 0 \\ 0 & \text{para } n = 0 \\ -\{a_n\} & \text{para } n < 0 \end{cases}$$

(y es sabido que $-ia_n \operatorname{sign}(n)$ dá los coeficientes de la serie conjugada de $\{a_n\}$)

y en G:

$$S\varphi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{para } 0 < x \leqq \pi \\ -\varphi(x) & \text{para } -\pi \leqq x < 0. \end{cases}$$

El operador de Hilbert será: $H = -iF^{-1}SF$ en G, y $H = -iF\,SF^{-1}$ en C. Es decir, en G:

$$H\varphi(x) = \frac{-i}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx}\, S\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, e^{-int}\, dt = \frac{-i}{\pi}\left\{\sum_{1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, e^{in(x-t)}\, dt - \right.$$

$$\left. - \sum_{-\infty}^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, e^{in(x-t)}\, dt \right\} = \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \operatorname{sen} n(x-t)\, dt$$

y ya es sabido en qué condiciones esto representa la función conjugada:

$$-\frac{1}{2\pi}\oint_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{tg}\dfrac{t-x}{2}}\, dt.$$

A la inversa, en C:

$$H\{a_n\} = \frac{-i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, S\sum_{-\infty}^{\infty} e^{imt} a_m\, dt = \frac{-i}{2\pi}\left\{\int_{0}^{\pi} \sum e^{it(m-n)} a_m\, dt - \right.$$

$$-\int_{-\pi}^{0} \Sigma e^{it(m-n)} a_m \, dt \Bigg\} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sum_{\infty-}^{\infty} a_m \operatorname{sen} t(m-n) \, dt.$$

y suponiendo que puede cambiarse el orden de los pasos al límite obtenemos:

$$H\{a_m\} = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{a_m}{m-n} [(-1)^{m-n} - 1].$$

fórmula semejante a la del caso continuo salvo un factor que anula la mitad de los sumandos y que aparece porque el límite superior de integración es finito y no hay una suma Césàro que elimine la parte oscilatoria.

3) Transformación de Hilbert en dos dimensiones. Como segundo ejemplo tomaremos el plano, que coincide con sus caracteres. Definimos:

$$F\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(t,s)\, e^{i(tx+sy)}\, dt\, ds.$$

Definiremos al operador signo con respecto a la recta $ax+by=0$, que limita dos semiplanos: $A(ax+by<0)$ y $B(ax+by>0)$.

$$S\varphi(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y) & \text{cuando } (x,y) \in B \\ -\varphi(x,y) & \text{cuando } (x,y) \in A. \end{cases}$$

El operador de Hilbert será:

$$^2H\varphi(x,y) = -iF^{-1} SF\varphi(x,y) = \frac{-i}{4\pi^2}$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(tx+sy)} S \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(u,v)\, e^{i(tu+vs)}\, du\, dv\, dt\, ds =$$

$$= \frac{-i}{4\pi^2} \left\{ \iint_B - \iint_A \right\} e^{-i(tx+sy)} \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(u,v)\, e^{i(tu+vs)}\, du\, dv\, dt\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \iint_B dt\, ds \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi(u,v) \operatorname{sen} [t(u-x)+s(v-y)]\, du\, dv.$$

Teniendo en cuenta que

$$\iint_B \operatorname{sen}[t(u-x)+s(v-y)]\,dt\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\frac{b}{a}s}^{\infty} \operatorname{sen}[t(u-x)+s(v-y)]\,dt =$$

$$= \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos s\left[v-y-\frac{b}{a}(u-x)\right]}{u-x}\,ds$$

(habiendo hecho la suma Césàro de la integral sobre t); obtendremos, suponiendo que puede cambiarse el orden de integración, lo que no reduce esencialmente el dominio de nuestras funciones:

$$^2H\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\infty} ds \oint\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u,v)\cos s\left[v-y-\frac{b}{a}(u-x)\right]}{u-x}\,du\,dv$$

y sumando las integrales sobre v y s:

$$^2H\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi}\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi\left(u, y+\frac{b}{a}(u-x)\right)}{u-x}\,du$$

y del mismo modo se obtiene la fórmula simétrica:

$$^2H\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi}\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi\left(x+\frac{a}{b}(v-y), v\right)}{v-y}\,dv.$$

Como se ve, para a, o $b=0$ estas fórmulas se reducen a la de una variable.

Como ejemplo tomemos $a=b=1$; $\varphi(x,y)=y\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$^2H\left[ye^{-\frac{x^2}{2}}\right] = \frac{1}{\pi}\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{(u+y-x)e^{-\frac{u^2}{2}}\,du}{u-x} = -2+2y\,\rho(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

donde $\rho(x) = \int_0^x e^{t^2/2}\, dt.$

Considerando a y como parámetro y aplicando la transformación de una variable obtendríamos en cambio:

$$H[ye^{-\frac{x^2}{2}}] = yH[e^{-\frac{x^2}{2}}] = 2y\,\rho(x)\,e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(Las integrales aquí utilizadas pertenecen a la tabla de transformadas de Hilbert que se está compilando en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires).

Para $a = b = 1$ la transformación en dos variables puede escribirse en la forma simétrica:

$$^2H\,\varphi(x,y) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u-y, u-x)}{u-(x+y)}\, du.$$

4) Si $\sum\limits_{m,n} c_{m,n} e^{i(mx+ny)}$ es una serie de Fourier doble, pueden definirse infinitas series conjugadas cuyos coeficientes estarían dados por:

$$c^*_{m,n} = -i\, c_{m,n} \operatorname{sign}(am + bn)$$

(a y b números reales).

BIBLIOGRAFIA

[1] GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. Comunicación presentada en la XIª reunión de la A. F. A., 1948.

[2] HARDY, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 37-331-1941.

[3] HILLE. *Comp. Math.* 6-93-1939.

[4] v. NEUMANN, *Act. Sci.* et *Ind.* Nº 229. 1935.

[5] TITCHMARSH, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals.* Oxford, 1937.

[6] TRICOMI, *Comm. Math. Helv.* 8-70-1935.